

1. Классификация металлургических систем

Процессы, для управления которыми создаются АСУ, можно разделить на три группы:

- ◆ непрерывные, которые характеризуются непрерывным режимом работы (электролиз алюминия, электроплавка никелево-медного агломерата в РТП, спекание нефелинового концентрата);
- ◆ полунепрерывные (непрерывно-дискретные), которые характеризуются полунепрерывным режимом работы. Например, при плавке оловянных концентратов в РТП происходит непрерывная загрузка шихты в течение определенного промежутка времени и затем выпуск продуктов плавки;
- ◆ периодические, которые характеризуются дискретным режимом работы, например, периодической загрузкой материалов в печь, проведением технологического процесса и выгрузкой полученного продукта (выращивание монокристаллов кремния). В соответствии с приведенной классификацией процессов выделяются АСУ непрерывными, полунепрерывными и периодическими процессами. Наибольшую сложность представляет автоматизация периодических процессов. Для реализации АСУ необходимо промоделировать описание данного технологического процесса.

2. Планирование экспериментов при построении статистических моделей различного типа

1. Постановка задач
2. Выбор факторов и параметров
3. Выбор вида модели

3. Классификация моделей металлургических систем

Статистическая – модель надежна с какой-то вероятностью.

Детерминированная – построенная по законам.

4. Ортогональное планирование экспериментов

Если поверхность отклика является существенно нелинейной, тогда в уравнение модели необходимо ввести квадратичные члены второго порядка. Для этого достраивают матрицу в соответствии с планами эксперимента второго порядка.

Расширенная матрица содержит:

- N_1 опытов в точках ДФЭ - ядро плана, из которого определяются линейные члены и их взаимодействия;
- n_0 опытов в центре плана, для оценки ошибки опытов;
- $2k$ дополнительных опытов в «звездных» точках, расположенных по координатным осям на расстоянии $\pm a$.

Отсюда общее число опытов:

$$N = N_1 + n_0 + 2k$$

Число уровней варьирования каждого фактора (-a; -1; 0; +1; +a) равно 5. Для облегчения вычислений и для того, чтобы параметры модели определялись независимо, план должен быть ортогональным. Это достигается введением вместо нового нормализованного фактора.

$$x'_i = x_i^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 = x_i^2 - \bar{x}_i^2,$$

где i - номер опыта, \bar{x}_i - среднее значение .

при числе факторов $k=2,3,4,5$ соответственно равняется 0,667;0,73;0,80;0,776. (при $k=5$ применяется полуреплика). Кроме того выбирается «звездное» плечо a по формуле.

$$a = \sqrt{0,5 \sqrt{N_1(N_1 + n_0 + 2k)} - N_1}.$$

В силу ортогональности планирования все параметры нормализованной модели второго порядка определяются независимо друг от друга:

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} y_u}{\sum_{u=1}^N x_{iu}^2}; \quad b_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^N (x_i x_j)_u y_u}{\sum_{u=1}^N (x_i x_j)_u^2}, \quad (i \neq j);$$

$$b_{ii} = \frac{\sum_{u=1}^N (x'_i)_u y_u}{\sum_{u=1}^N (x'_i)_u^2}; \quad b_0 = \frac{\sum_{u=1}^N y_u}{N} - \sum_{i=1}^k b_{ii} \bar{x}_i^2.$$

В числителях данных формул находятся суммы произведений значений отклика y_u и значений нормализованного фактора в соответствующем столбце x_{iu} , а в знаменателе - сумма квадратов значений нормализованных факторов из соответствующих столбцов.

Дисперсия оценок параметров модели находится по формулам:

$$S^2(b_i) = \frac{S_b^2}{\sum_{u=1}^N (x_{iu})^2}; \quad S^2(b_{ij}) = \frac{S_b^2}{\sum_{u=1}^N (x_i x_j)_u^2};$$

$$S^2(b_{ii}) = \frac{S_b^2}{\sum_{u=1}^N (x'_i)_u^2}; \quad S^2(b_0) = \frac{S_b^2}{N} + \sum_{i=1}^k (\bar{x}_i^2) S^2(b_{ii}).$$

Недостатком центрального композиционного ортогонального планирования (ЦКОП) второго порядка является то, что параметры модели определяются с различной точностью, так как у них различны дисперсии. Поэтому информация о поверхности отклика, содержащаяся в модели, полученной после реализации ЦКОП второго порядка, различна в разных направлениях факторного пространства.

5. Этапы построения детерминированных моделей различного вида

1. Постановка задач
2. Формулировка физической модели (начало условного процесса, граничные, основные виды воздействия на объект)
3. Формулировка математической модели
4. Выбор метода и разработка решения задач
5. Программирование и отладка программ
6. Выбор параметров вычислительной модели
7. Решение контрольных задач

6. Планирование экспериментов для построения квадратичной полиномиальной модели

7. Стадии разработки аналитической модели с сосредоточенными параметрами

При возникновении трудностей в использовании аналитической модели, для получения которой требуется принимать допущения о постоянстве параметров дифференциальных уравнений (7.1)-(9.8) и (10.1)-(11.4), во многих случаях целесообразно решать задачи с произвольным законом изменения параметров, применяя численные решения.

Обычно для решения дифференциальных уравнений используют разностные методы. Исходное дифференциальное уравнение, общий вид которого может быть представлен выражением

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (12.1)$$

для численного решения преобразуется к разностному виду введением дискретных переменных $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n)$. Обычно дают равномерное приращение независимой переменной Dx , откуда $x_i = x_0 + iDx$, где $i=0, 1, 2, \dots, n$. Тогда (12.1) в разностной форме

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} = f_i(x, y)$$

откуда

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x f_i(x, y) \quad (12.2)$$

В результате (12.2) позволяет по известному значению y_i и $f_i(x, y)$ на предыдущем i -том шаге по x найти y на последующем $(i+1)$ -ом шаге.

Чтобы осуществить этот процесс вычислений вплоть до n -го шага надо задать начальное $y(x_0) = y_0$. Вид функции $f_i(x, y)$ зависит от принятого метода вычисления производной (табл.12.1).

В простейшем случае, реализующем метод Эйлера, задают $f_i(x, y) = f(x_i, y_i)$, т.е. экстраполируют производную на целый шаг Dx вперед, вычислив ее значение в предыдущей точке. При использовании методов повышенной точности Эйлера-Коши, Рунге-Кутта и др., погрешность решения может быть существенно снижена при сокращении времени расчетов.

Для проверки расчетов при численном интегрировании уравнения (12.1), необходимо задать величину шага Dx , от которого зависят погрешность вычислений dy и затраты времени на расчеты. Для оценки погрешности, вносимой численным методом решения задачи, используют два приема.

Таблица 12.1

Методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений

№ п/п	Наименование метода	Расчетная формула	Обозначения	Порядок погрешности и. S
1	Метод Эйлера	$y_{i+1} = y_i + \Delta x f(x_i, y_i)$		2
2	Усовершенствованный метод Эйлера	$y_{i+1} = y_i + \Delta x / 2 \times [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)]$	$x_{i+1} = x_i + \Delta x$ $y_{i+1}^* = y_i + \Delta x f(x_i, y_i)$	2
3	Метод Эйлера – Коши	$y_{i+1} = y_i + \Delta x f(x_{i+0.5}, y_{i+0.5})$	$x_{i+0.5} = x_i + \Delta x / 2$; $y_{i+0.5} = y_i + \Delta x / 2 \times f(x_i, y_i)$	3
4	Метод Рунге - Кутта	$y_{i+1} = y_i + \Delta x / 6 (k_1 + 4k_2 + k_3)$	$k_1 = \Delta x f(x_i, y_i)$ $k_2 = \Delta x \times f(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$; $k_3 = \Delta x f(x_i + \Delta x, y_i + 2k_2 - k_1)$	4

При первом, сопоставляют численные данные с результатами известного аналитического решения, являющегося при постоянных параметрах модели ее частным случаем.

При втором, сопоставляют результаты повторного решения задачи с последовательно уменьшаемой величиной шага Dx . Если произвести вычисления, изменив Dx , в два раза, то для оценки dy можно воспользоваться приближенной формулой Рунге:

$$\delta y_{\Delta x} = \frac{[y(2\Delta x) - y(\Delta x)]2^S}{(2^S - 1)},$$

где $y(2Dx)$ и $y(Dx)$ - расчетные значения полученные соответственно с шагом $2Dx$ и Dx , S - порядок погрешности, присущий выбранному методу (табл.12.1).

При уменьшении шага Dx , расчетные зависимости $y(x)$ сходятся к точному решению. Во многих случаях желательно предусмотреть автоматический выбор шага Dx , по оценке погрешности получаемого результата. В этих случаях сравнивают погрешность с заданной предельной ошибкой dy_{max} и если $dy > dy_{max}$ повторяют вычисления с уменьшенным шагом $Dx^* = a(Dx)$, в котором обычно $a = 0,8 \dots 0,9$.

После устранения вычислительной погрешности, можно приступать к оценке адекватности модели, так как остаточная погрешность связана только с погрешностями физической модели и ее математической реализации.

8. Проверка адекватности статистических моделей

Проверка адекватности математической модели данным эксперимента проводится только в случае ненасыщенного планирования на основе сопоставления дисперсии воспроизводимости среднего значения функции отклика $s^2(y)$ и дисперсии адекватности. Оценка дисперсии адекватности при $N > m$ характеризует отклонения между результатами наблюдений и значениями, формируемыми по функции отклика

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{N - m} \sum_{u=1}^N (\bar{y}_u - y'_u)^2, \quad N > m,$$

где m – количество оцениваемых коэффициентов модели;

\bar{y}_u – среднее значение результатов наблюдения в u -й точке плана;

y'_u – значение отклика в этой же точке, предсказанное на модели.

Количество степеней свободы дисперсии адекватности $j_a = N - m$.

При насыщенном планировании нет степеней свободы и сумма отклонений равна нулю.

Проверка адекватности сводится к проверке гипотезы об однородности оценки дисперсии воспроизводимости $s^2(y)$ с количеством степеней свободы $j(y)$ и оценки дисперсии адекватности. Проверка осуществляется по критерию Фишера аналогично рассмотренной выше проверке однородности дисперсий воспроизводимости. Оценки дисперсий в формуле расчета критерия расставляются так, чтобы его величина была больше единицы, критическая область является двусторонней.

Если вычисленное значение критерия меньше критического, то нет оснований для сомнений в адекватности модели. Однако положительный исход статистической проверки не гарантирует достоверной адекватности, а тем более истинности модели (хотя и не противоречит такому предположению). Когда гипотеза отклоняется, следует вывод о неадекватности модели, следовательно, она заведомо не является истинной. Дальнейшее применение неадекватной модели обычно нецелесообразно, и надо принять меры по ее совершенствованию.

Причиной неадекватности могут являться: ошибки в организации и проведении опытов, например неконтролируемое изменение неучтенных в модели факторов; погрешности в задании исходных данных и в измерении результатов; большой размах варьирования факторов и другие причины. Иначе говоря, анализ причин неадекватности требует серьезного изучения сущности исследуемого процесса и методов его исследования.

9. Стадии разработки программной модели с сосредоточенными параметрами

10. Анализ результатов статистического моделирования

К качеству оценок, полученных в результате статистической обработки результатов моделирования, предъявляются следующие требования:

- 1) Несмещенность оценки - равенство математического ожидания оценки определяемому параметру $m[\hat{g}] = g$, где \hat{g} - оценка параметра g .
- 2) Эффективность оценки - минимальность среднего квадрата ошибки данной оценки $m[(\hat{g}_{\min} - g)^2] \leq m[(\hat{g}_i - g)^2]$, где \hat{g}_{\min} - рассматриваемая оценка, \hat{g}_i - любая другая оценка.
- 3) Состоятельность оценки - сходимость по вероятности при $N \rightarrow \infty$ к оцениваемому параметру $\lim p(|\hat{g} - g| \geq \varepsilon) = 0$.

Формулы вычисления оценок:

- а) расчет вероятности наступления события A . В качестве оценки для искомой вероятности $p=P(A)$ используется частота наступления события m/N , где m - число свершений события A ; N - общее число исходов. Такая оценка вероятности является состоятельной, несмещенной и эффективной. В памяти ЭВМ достаточно одной ячейки, где накапливается число m , при условии, что N задано заранее;
- б) закон распределения. Область возможных значений случайной величины разбивается на n интервалов. Затем накапливается количество попаданий случайной величины в эти интервалы m_k . Оценкой для вероятности попадания случайной величины в интервал с номером k служит величина m_k/N . Необходимо фиксировать n значений m_k , т.е. требуется иметь n ячеек памяти;
- в) среднее значение. Накапливается сумма возможных значений случайной величины y_k . Тогда среднее значение $\hat{y} = 1/N \sum y_k$. Требуется всего лишь одна ячейка для накапливаемой суммы.
- г) оценка дисперсии. В качестве оценки можно использовать выражение $S^2 = 1/N \cdot \sum (y_k - \hat{y})^2$, но непосредственное вычисление по этой формуле не рационально, так как здесь используется среднее значение, которое изменяется в процессе накопления и неизвестно в момент промежуточных вычислений. Более рационально использовать $S^2 = (\sum y_k^2 - (\sum y_k)^2/N) / (N-1)$ и накапливать две суммы.

11. Формулировка физической и математической модели детерминированного процесса различной пространственной структуры

Детерминированный алгоритм — алгоритмический процесс, который выдаёт уникальный и предопределённый результат для заданных входных данных.

12. Статистическая обработка результатов экспериментов различного типа

Основные практические методы статистической оценки погрешностей результатов измерений.

Различают генеральную и выборочную совокупность измерений. Под генеральной совокупностью подразумевают всё множество возможных значений измерений x_i . Для выбора совокупности число измерений x_i N ограничено. Пусть имеется набор (выборка) экспериментальных данных x_1, x_2, \dots, x_N . Обработку этих данных производят обычно в следующем порядке:

1. Определяют точечные оценки математического ожидания X дисперсии S_x и среднего квадратичного отклонения S_x
2. Анализируют ряд в целях обнаружения грубых ошибок и промахов.
3. Находят точечные оценки очищенного ряда.
4. Определяют интервальные оценки математического ожидания и дисперсии с помощью доверительной вероятности.
5. Оценивают относительную погрешность результатов серии измерений при заданной доверительной вероятности:

13. Проверка адекватности детерминированных моделей различного вида

Для однозначного ответа на вопрос об адекватности детерминированной модели применительно к стохастическим переменным системы целесообразно воспользоваться процедурой корреляционного анализа, вычислив значения коэффициента линейной корреляции между переменными y и x :

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (19.1)$$

где x_i и y_i - пара соответствующих значений x и y в каждой i -той опытной точке, \bar{x} и \bar{y} - средние значения x и y .

14. Этапы построения оптимизационной модели

Классификация оптимизационных методов и моделей.

По характеру взаимосвязи между переменными: линейные и нелинейные.

По характеру изменения переменных: непрерывные и дискретные.

По учету факторов времени: статические и динамические.

По наличию информации о переменных: задачи полной определенности (детерминированные) и задачи в условиях неполной определенности.

По числу критериев: простые однокритериальные задачи и многокритериальные задачи.

Если критерий эффективности и система ограничений линейны, такая задача является задачей линейного программирования.

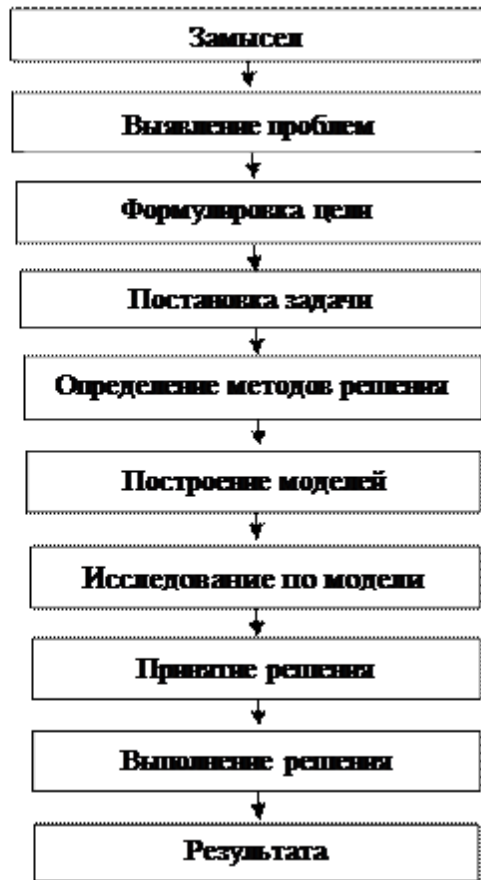
Если критерий эффективности и система ограничений являются целыми числами, то эта задача называется задачей целочисленного линейного программирования, а если система ограничений и целевая функция заданы нелинейными функциями, то имеем задачу нелинейного программирования.

Если целевая функция и ограничения зависят от параметров, то задача называется параметрическим программированием.

Если целевая функция и система ограничений носят случайный характер, то получим задачу стохастического программирования.

Если точный оптимум найти алгоритмическим путем невозможно, то прибегают к методам эвристического программирования.

Основные этапы построения оптимизационных моделей можно представить в виде схемы:



15. Этапы построения статистических моделей различного вида

- 1) постановка задачи
- 2) выбор факторов и параметров
- 3) выбор вида модели
- 4) планирование эксперимента

16. Оптимизация методом линейного программирования

Таким образом, применение симплекс-метода для оптимизации линейной целевой функции задачи ЛП в стандартной форме при наличии базисного решения сводится к следующему алгоритму:

1. Вычисляются приращения целевой функции по правилу скалярного произведения.
2. Выбирается среди них максимальное положительное. Если все оценки не положительны, то начальное базисное решение оптимально. Вводится в базис переменная с соответствующим индексом.
3. Определяется с помощью правила минимального отношения переменная, выводимая из базиса.
4. Строится с помощью элементарных преобразований система канонического вида для нового базиса.
5. Осуществляется переход к началу данного алгоритма и повторяются итерации 1-4 до получения оптимального решения.

17. Оптимизация методом крутого восхождения

Градиентом называют вектор, показывающий направление наискорейшего изменения некоторой величины, значение которой меняется от одной точки пространства к другой. Градиент () непрерывной однозначной функции есть вектор:

где — частная производная функции отклика по i -му фактору; — единичные векторы в направлении координатных осей факторного пространства.

Согласно теореме Тейлора о разложении аналитической функции в ряд частные производные функции по факторам равны по величине и знаку, соответствующим коэффициентам регрессии. Следовательно, градиент функции отклика y есть вектор:

Движение по градиенту обеспечивает наиболее короткий путь к оптимуму, так как направление градиента — это направление самого крутого склона, ведущего от данной точки к вершине.

Если изменять факторы пропорционально их коэффициентам с учетом знака, то движение к оптимуму будет осуществляться по самому крутому пути. Этот процесс [9] движения к области оптимума называют крутым восхождением.

Процедура оптимизации методом крутого восхождения может быть выполнена по следующей схеме:

- 1) выбирается начальная точка, отвечающая наилучшему из известных рабочих режимов объекта;
- 2) задается интервал варьирования каждого фактора;
- 3) с центром в начальной точке проводится полный факторный эксперимент для определения вектора градиента;
- 4) вычисляются произведения y и фактор, для которого это произведение максимально, принимается за базовый, т.е. x_i ;
- 5) для базового фактора выбирают шаг крутого восхождения Δx_i ;
- 6) определяются шаги крутого восхождения по остальным факторам: Δx_j ;
- 7) совершается рабочее движение, очевидно i -ая координата h -ой точки будет $x_i + \Delta x_i$ (знак “плюс” берется при поиске максимума, а знак “минус” — при поиске минимума);
- 8) в каждой рабочей точке могут быть проведены опыты, во время которых измеряются значения отклика (признаком достижения частного экстремума на рабочем направлении является снижение значения отклика после некоторой точки, при этом шаги варьирования для каждого последующего цикла выбираются такими же или уменьшаются по сравнению с шагами варьирования предыдущего цикла);
- 9) поиск прекращается, когда оценки коэффициентов регрессии получаются статистически незначимыми — область оптимума достигнута.

При поиске оптимума могут встретиться сложные случаи (наличие нескольких локальных оптимумов, седловая точка и т.д.). Поэтому метод крутого восхождения не гарантирует нахождения глобального оптимума. Во многом это предопределяется и начальными условиями эксперимента.

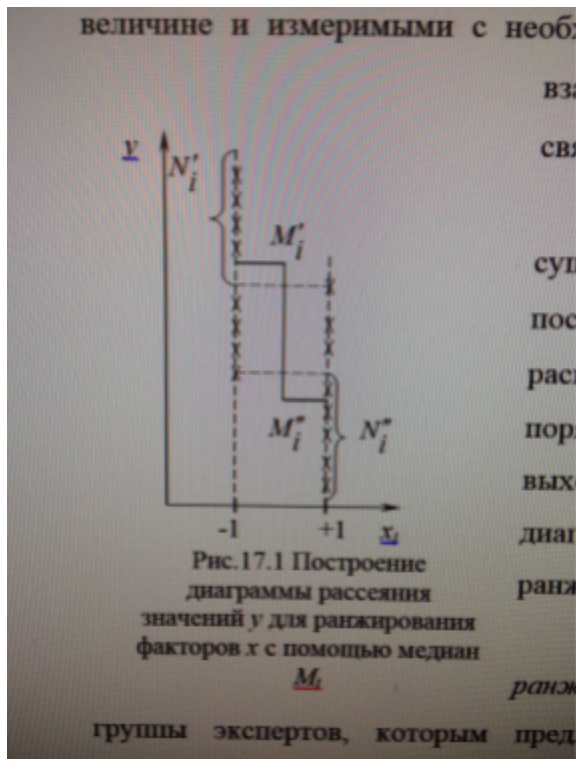
Глобальный оптимум может быть найден при повторении эксперимента с меняющимися в широком диапазоне начальными условиями.

18. Метод случайного баланса

Метод случайного баланса используется для экспериментального отсеивания факторов по данным небольшой серии опытов со случайным выбором наибольшего или наименьшего значения исследуемых факторов в каждом опыте. Для удобства записи плана эксперимента вводят нормированное обозначение величины фактора $(-1; 0; +1)$.

Результаты опытов используют для построения диаграммы рассеяния (рис. 17.1) откладывая для каждого фактора отдельно по ординате значения y в тех опытах, когда фактор x был на нижнем уровне (-1) и на верхнем уровне $(+1)$ при любых значениях остальных факторов.

Произведение разности медиан $\Delta M = M''_i - M'_i$ полученных двух групп точек на количество выделяющихся точек N , расположенных ниже нижней и выше верхней точек другого уровня, является мерой влияния фактора x_i на y . Величина ранга $R = N \Delta M$ служит для ранжирования факторов.



19. Сравнительная характеристика методов поисковой оптимизации

Для вычисления используется вычислительная техника. Такие методы называют методами спуска. Метод координатного спуска заключается в поочередном поиске минимума по координате x_1 , затем x_2 и т.д. поиск ведется с одинаковым шагом, который уменьшается после нахождения всех значений x_{1m} , x_{2m} , ..., x_{nm} .

Метод координатного спуска с квадратичной интерполяцией – экстраполяцией основан на последовательном поиске минимума каждой переменной с применением для этого метода квадратичной интерполяции – экстраполяции.

Метод спирального координатного спуска отличается тем, что шаг меняется каждый раз при переходе от поиска минимума по одной переменной к поиску по другой. Обычно это дает некоторое сокращение времени поиска и в трехмерном пространстве напоминает спуск во впадину по спирали.

20. Метод симплексного поиска

Симплекс-метод — алгоритм решения оптимизационной задачи линейного программирования путём перебора вершин выпуклого многогранника в многомерном пространстве.

Сущность метода: построение базисных решений, на которых монотонно убывает линейный функционал, до ситуации, когда выполняются необходимые условия локальной оптимальности.

21. Анализ результатов статистического моделирования (10)

22. Многокритериальная оптимизация

Многокритериальная оптимизация, или программирование — это процесс одновременной оптимизации двух или более конфликтующих целевых функций в заданной области определения.

Критерии оптимальности: Критерий Парето.

Методы решения

Интерактивность - Часто решение задачи многокритериальной оптимизации происходит с участием эксперта — человека, который выбирает и принимает решения на основе информации, представленной системой поддержки принятия решений. Возможно участие группы из нескольких экспертов. В случае участия человека в поиске решения алгоритмы и методы называют

интерактивными.

Эволюционные методы - Упоминания о применении генетических алгоритмов для решения задачи многокритериальной оптимизации относятся к концу 1960-х.

Метод исследования пространства параметров - Метод основан на построении допустимого и Парето-оптимального множеств решений. Позволяет решать задачи проектирования, идентификации[9].