

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Инженерно-строительный институт
Кафедра сопротивления материалов

Сопротивление материалов

Конспект лекций

*Учебно-методическое пособие
для бакалавров и специалистов технических направлений*



Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
2013

Содержание

1 Общие понятия	3
2 Осевое растяжение и сжатие стержней	3
3 Статически неопределимые стержневые системы	12
4 Кручение стержней	20
5 Плоский изгиб	32
6 Нормальные напряжения при чистом изгибе	44
7 Сложное сопротивление	57
8 Перемещение при изгибе. Аналитический метод	71
9 Устойчивость элементов конструкции	83

1. Общие понятия

1.1. Введение

Сопротивление материалов – это экспериментально-теоретическая дисциплина о прочности, жесткости и устойчивости элементов конструкций.

Прочность – способность твердого тела выдерживать заданные нагрузки, не разрушаясь.

Жесткость – способность элементов конструкции под действием заданных нагрузок сохранять в установленных пределах свои размеры и форму.

Устойчивость – способность элементов конструкций под действием заданных нагрузок сохранять первоначальную форму устойчивого равновесия.

Основными прочностными задачами сопротивления материалов являются:

- 1) определение грузоподъемности конструкции.
- 2) подбор размеров сечения элементов конструкции.
- 3) проверочный расчет конструкции на прочность.

1.2. Деформации

Деформацией называют способность твердого тела изменять свои размеры и форму в результате действия внешних сил.

В зависимости от свойств материала, разделяют деформацию на *упругую* и *пластическую* (остаточную). Упругая исчезает после снятия нагрузки, пластическая остается в теле после прекращения действия на него внешних сил.

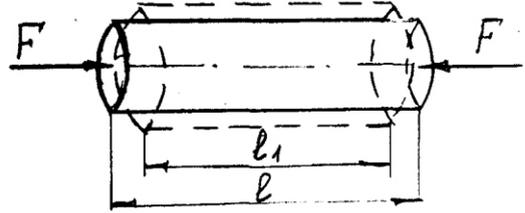
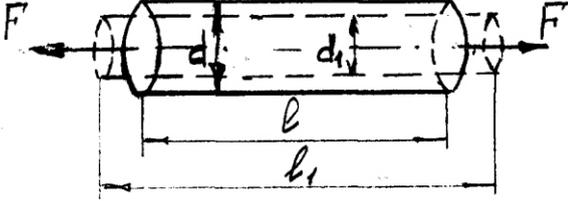
Под действием внешних сил стержни могут испытывать следующие простейшие виды деформации:

- а) осевое растяжение или сжатие (рис. 1.1а); силы действуют вдоль оси стержня;
- б) сдвиг или срез (рис. 1.1б);
- в) кручение (рис. 1.1в); нагрузка в виде пары сил, образующей момент M , который действует в плоскости, перпендикулярной оси стержня;
- г) изгиб (рис. 1.1г); силы или пары сил, образующие момент M , которые приложены в плоскости, проходящей через продольную ось стержня.

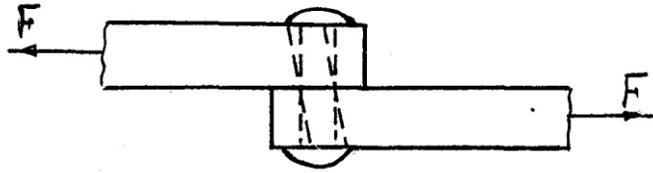
2. Осевое растяжение или сжатие стержней

Стержнем называется тело, один из размеров которого значительно больше двух других.

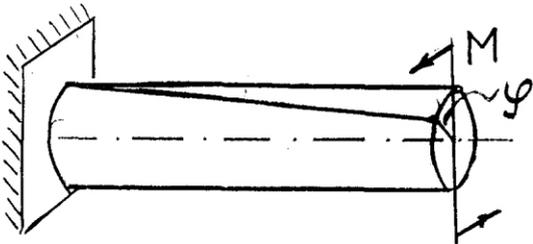
a)



δ)



β)



2)

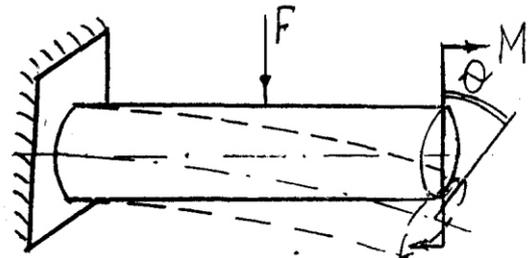


Рис. 1.1

Растяжением или сжатием называется деформация, вызванная силами, приложенными к центрам тяжести сечений, вдоль продольной оси стержня.

Силы считаются растягивающими (положительными), если они направлены от плоскости сечения стержня и сжимающими (отрицательными), если они направлены к плоскости сечения. (рис. 2.1).

2.1. Продольная сила

Внутренние усилия определяются с помощью метода сечений. Мысленно проведем разрез стержня плоскостью (рис. 2.2а). Рассмотрим равновесие отсеченной части стержня (любой).

В сечении стержня возникают элементарные внутренние силы упругости. Равнодействующей этих сил является *продольная сила (усилие) N* (рис. 2.2б). Определим значение продольной силы из уравнения равновесия для отсеченной части.

$$\sum x: N - F = 0; \quad N = F.$$

Пример 1. Колонна, опирающаяся на фундамент, нагружена, как показано на рис. 2.3а. Определить внутренние усилия N_1 и N_2 , возникающие на каждом из участков колонны.

В основании колонны возникает реакция R_A , которая может быть найдена из условия равенства нулю суммы проекций на ось y всех приложенных к ней сил

$$\sum y: -F_1 + 2F_2 + R_A = 0; \quad R_A = F_1 - 2F_2.$$

Применяя метод сечений, определим усилия на каждом из участков колонны. Проведя на первом участке колонны сечение m_1n_1 и условно отбросив нижнюю часть колонны (рис. 2.3а) замечаем, что при заданном направлении силы F_1 усилие N_1 должно быть направлено к сечению (сжимающим), т.е. уравновешивать приложенную внешнюю силу F_1 . Рассматривая условие равновесия для отсеченной части, получим

$$\sum y: -F_1 + N_1 = 0; \quad N_1 = F_1.$$

Точно также, проведя на втором участке колонны сечение и отбросив ее нижнюю часть (рис. 2.3е), определим усилие N_2 .

$$\sum y: -F_1 + 2F_2 + N_2 = 0; \quad N_2 = F_1 - 2F_2.$$

Продольная сила равна алгебраической сумме сил, приложенных к отсеченной части стержня.

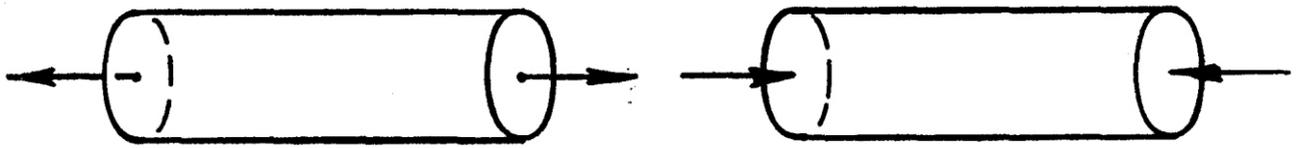


Рис. 2.1

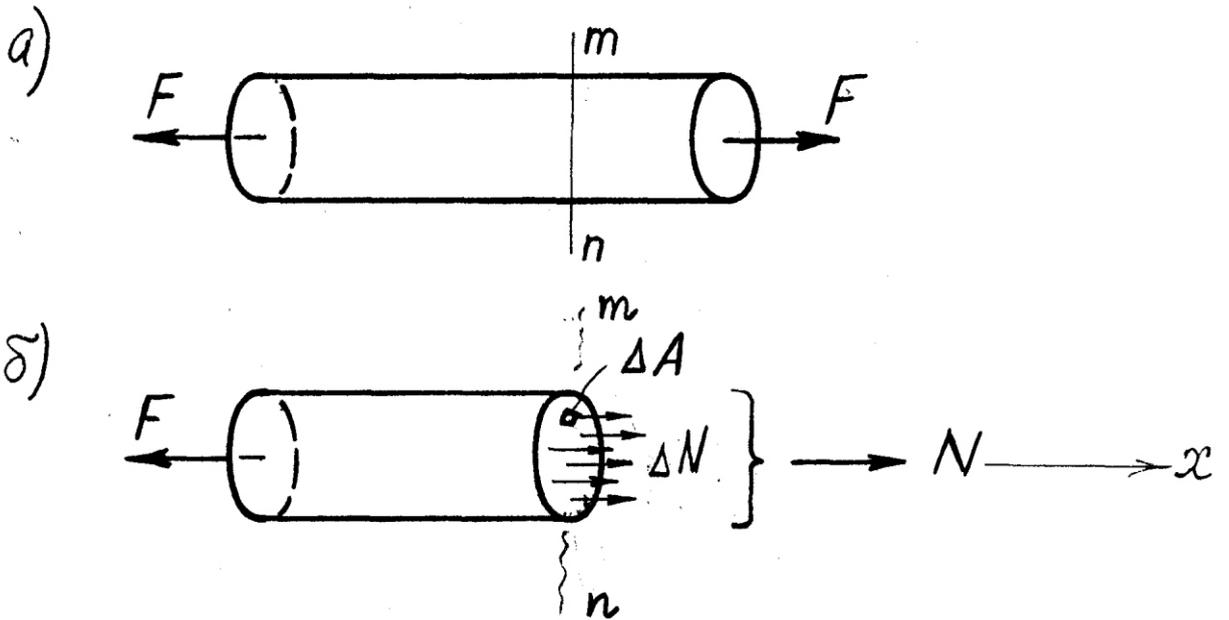
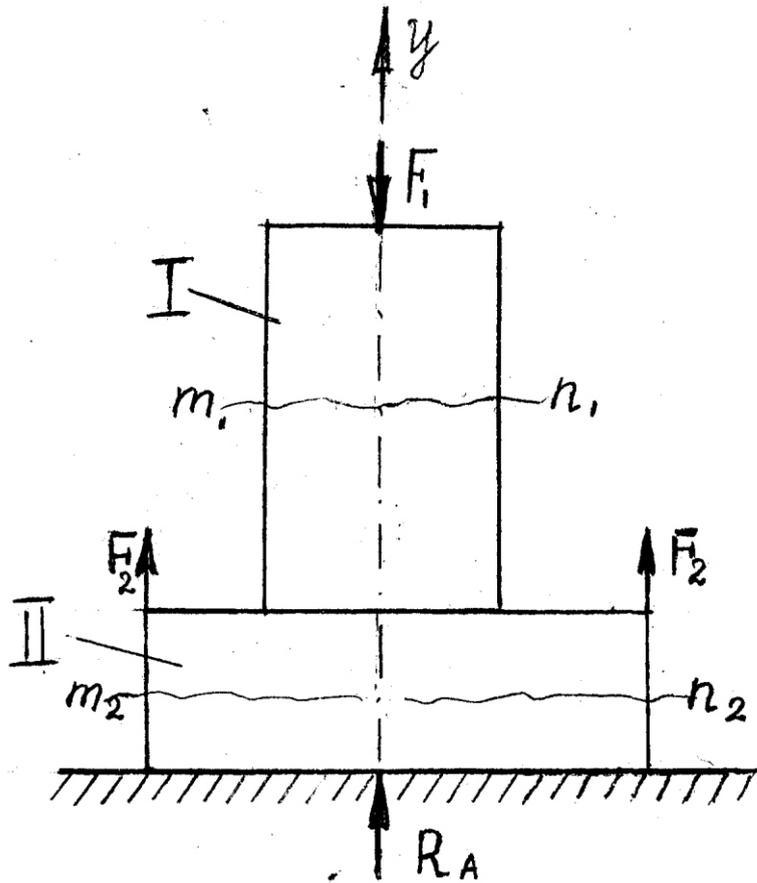
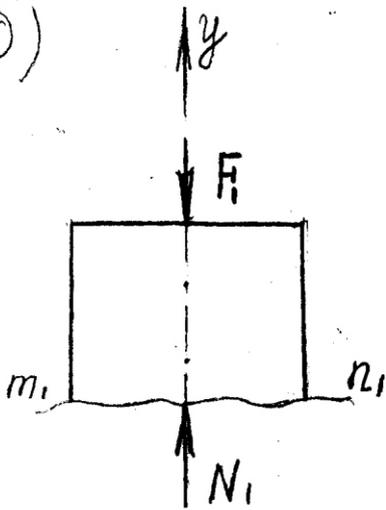


Рис. 2.2

a)



b)



c)

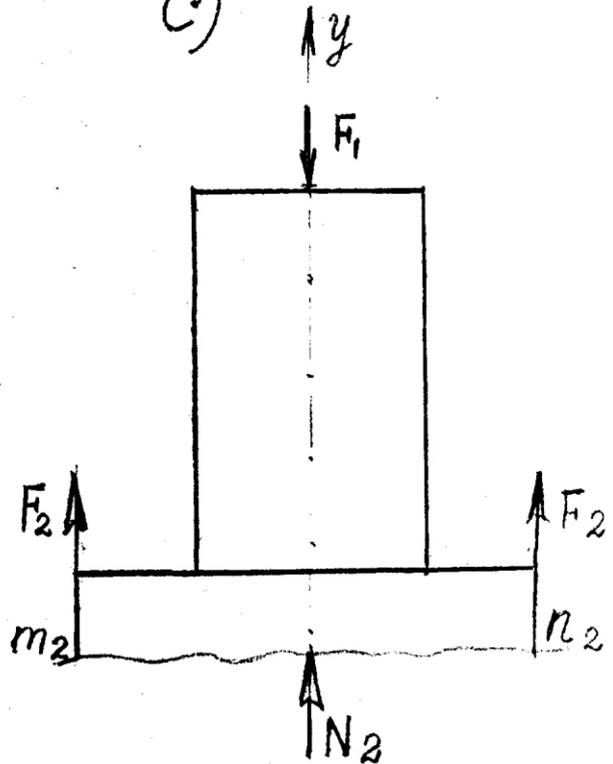


Рис. 2.3

2.2. Напряжение

Вернемся к рассмотрению равновесия отсеченной части стержня (рис. 2.2б). Из уравнения равновесия мы получили, что $N = F$.

В сечении mn выделим элементарную площадку ΔA , в которой возникает элементарная сила упругости ΔN . Для оценки интенсивности внутренних усилий в определенной точке сечения используют понятие **напряжения**

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A},$$

где σ – нормальное напряжение в плоскости данного сечения.

Внутренняя сила взаимодействия, передающаяся через единицу площади поперечного сечения, выделенную вокруг какой-либо точки называется напряжением в этой точке.

Размерность напряжения (H/m^2 ; $кг/см^2$). Определим продольную силу (усилие) в сечении mn суммированием элементарных сил упругости. Таким образом

$$N = \int_A \sigma dA,$$

где A – площадь сечения стержня. Как показывают опыты на растяжение стержней различных материалов, продольные волокна испытывают одинаковые удлинения, а поперечные сечения стержней остаются плоскими. Следовательно, $\sigma = const$ и равнодействующую N определяют так

$$N = \int_A \sigma dA = \sigma \int_A dA = \sigma A, \quad \text{тогда}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A}} \quad (2.1)$$

2.3. Деформации

Абсолютная продольная деформация стержня Δl (рис. 1.1а) равна $\Delta l = l_1 - l$.

Абсолютная поперечная деформация стержня $\Delta d = d_1 - d$.

Отношение абсолютной деформации стержня к его первоначальной длине называется **относительной деформацией**

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}; \quad \varepsilon_n = \frac{\Delta d}{d}, \quad \text{где}$$

ε – относительная продольная деформация, ε_n – относительная поперечная деформация.

Между поперечной и продольной относительными деформациями существует постоянное отношение, называемое коэффициентом поперечной деформации (коэффициент Пуассона).

$$\mu = \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon}. \quad (2.2)$$

Это постоянный физический коэффициент, характеризующий упругие свойства материалов.

Закон Гука:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \quad (2.3)$$

Модуль нормальной упругости E характеризует упругие свойства материала.

Произведение EA называют **жесткостью** стержня при растяжении (сжатии).

Если стержень имеет участки разной длины и жесткости, то полная деформация его вычисляется по формуле

$$\Delta l_{\text{пол}} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E_i A_i}, \quad \text{где}$$

i – номер расчетного участка.

n – число расчетных участков в стержне.

Учитывая, что $N/A = \sigma$, $\Delta l/l = \varepsilon$ из (2.3) имеем:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (2.4)$$

Относительное удлинение прямо пропорционально возникающему в поперечном сечении стержня нормальному напряжению.

Модуль упругости E представляет собой коэффициент пропорциональности между напряжением и относительной деформацией в законе Гука.

2.4. Условие прочности

Для каждого материала экспериментально может быть установлена величина **предельного напряжения** $\sigma_{пред}$. При расчетах конструкции напряжения в них должны быть меньше $\sigma_{пред}$. С учетом коэффициента запаса прочности n будем иметь

$$\frac{\sigma_{пред}}{n} = [\sigma],$$

где $[\sigma]$ – **допускаемое напряжение** для данного материала. Следовательно, наибольшее напряжение, возникающее при работе конструкции, не должно превосходить допускаемого напряжения. В этом и заключается условие прочности

$$\sigma_{max} = \frac{|N_{max}|}{A} \leq [\sigma]. \quad (2.5)$$

На основании условия прочности решают три типа инженерных задач:

1) при известной нагрузке для выбранного материала определяют размеры поперечного сечения стержня

$$A \geq \frac{|N_{max}|}{[\sigma]}.$$

2) при заданных размерах и материале определяют безопасную нагрузку

$$|N_{max}| \leq A[\sigma].$$

3) выполняют проверочный расчет прочности конструкции

$$|\sigma_{max}| \leq [\sigma].$$

2.5. Эпюры продольной силы и напряжения

Эпюрой называется график изменения внутреннего силового фактора по длине стержня.

Пример 2. Стержень переменного поперечного сечения жестко заделан одним концом и нагружен силами, как показано на рис. 2.4.

Составим уравнения равновесия:

$$\sum x: F - 3F + 2F - F + R_A = 0. \quad R_A = F.$$

Определим продольную силу на каждом расчетном участке.

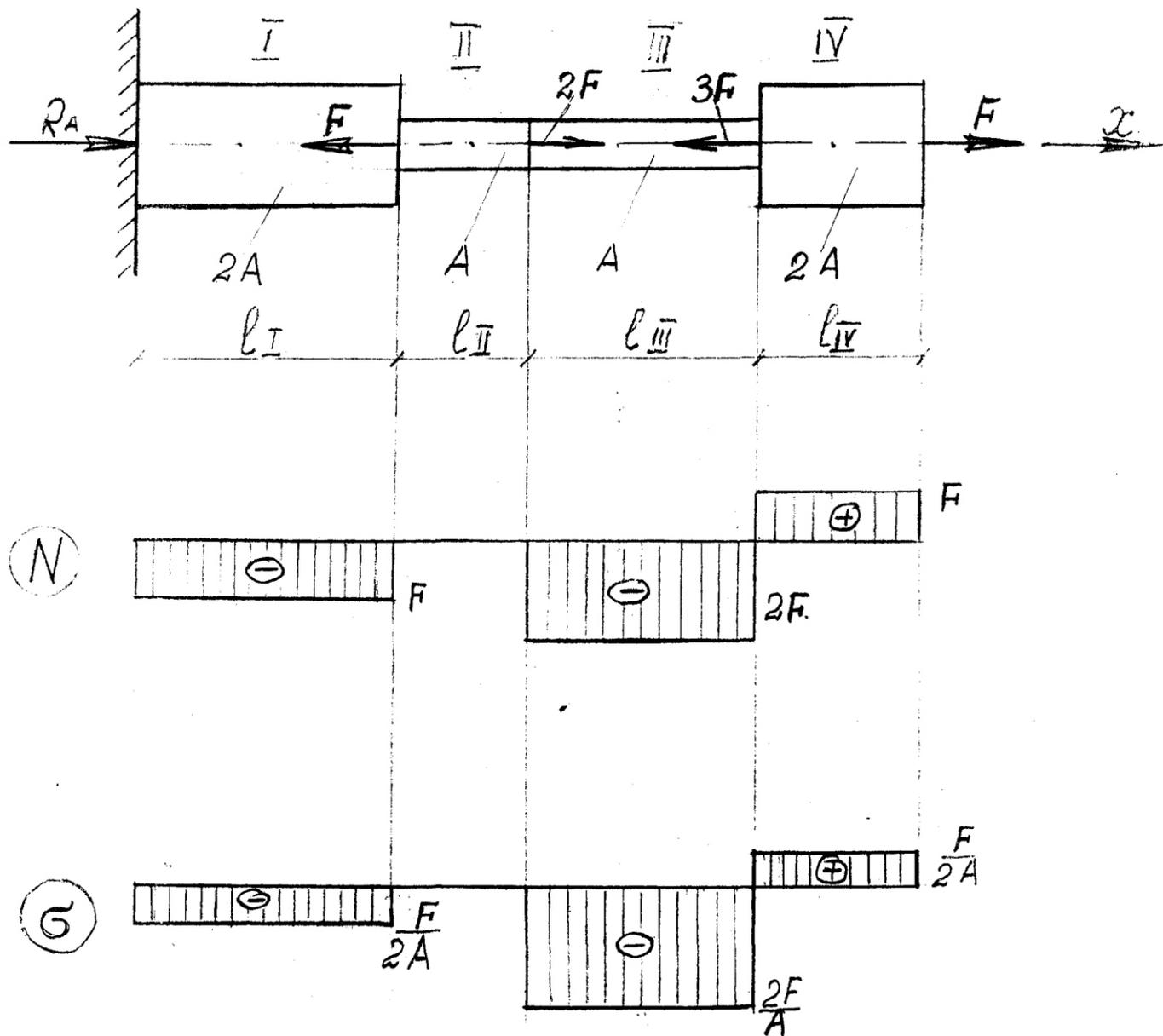


Рис. 2.4

1 участок (рис. 2.5а)

$$\sum x: R_A - N_1 = 0; N_1 = R_A = F.$$

$N_1 = F$. (сжимающая продольная сила).

2 участок (рис. 2.5б)

$$\sum x: R_A - F + N_2 = 0; N_2 = 0.$$

3 участок (рис. 2.5в)

$$\sum x: F - 3F + N_3 = 0; N_3 = 2F. \text{ (сжимающая продольная сила).}$$

4 участок (рис. 2.5г)

$$\sum x: F - N_4 = 0; N_4 = F. \text{ (растягивающая продольная сила).}$$

Вычислим напряжения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{F}{2A} = 0,5 \frac{F}{A}. \text{ (сжатие).} \\ \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = 0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{2F}{A}. \text{ (сжатие).} \\ \sigma_4 = \frac{N_4}{A_4} = \frac{F}{2A} = 0,5 \frac{F}{A}. \text{ (растяжение).} \end{array} \right.$$

Эпюры продольной силы и напряжения показаны на рис. 2.4.

3. Статически неопределимые стержневые системы

3.1. Общие понятия

Рассмотрим стержневую систему, рис. 3.1а, состоящую из двух подвесок (стержней 1, 2) и абсолютно жесткого бруса. Говоря об абсолютной жесткости тела, считаем его недеформируемым.

Из условия вида закрепления стержней и конструкции следует, что в стержнях возникают только осевые растягивающие усилия. Используя метод сечения, рассмотрим равновесие отсеченной части (рис. 3.1б). N_1, N_2 – усилия в стержнях.

$$\sum x: 0 = 0;$$

$$\sum y: N_1 + N_2 - F = 0;$$

$$\sum M_{(A)}: -N_1 \cdot a + N_2 \cdot a = 0, \quad N_1 = N_2,$$

$$\text{и из } \sum y: 2N_1 = F, \quad N_1 = N_2 = \frac{F}{2}.$$

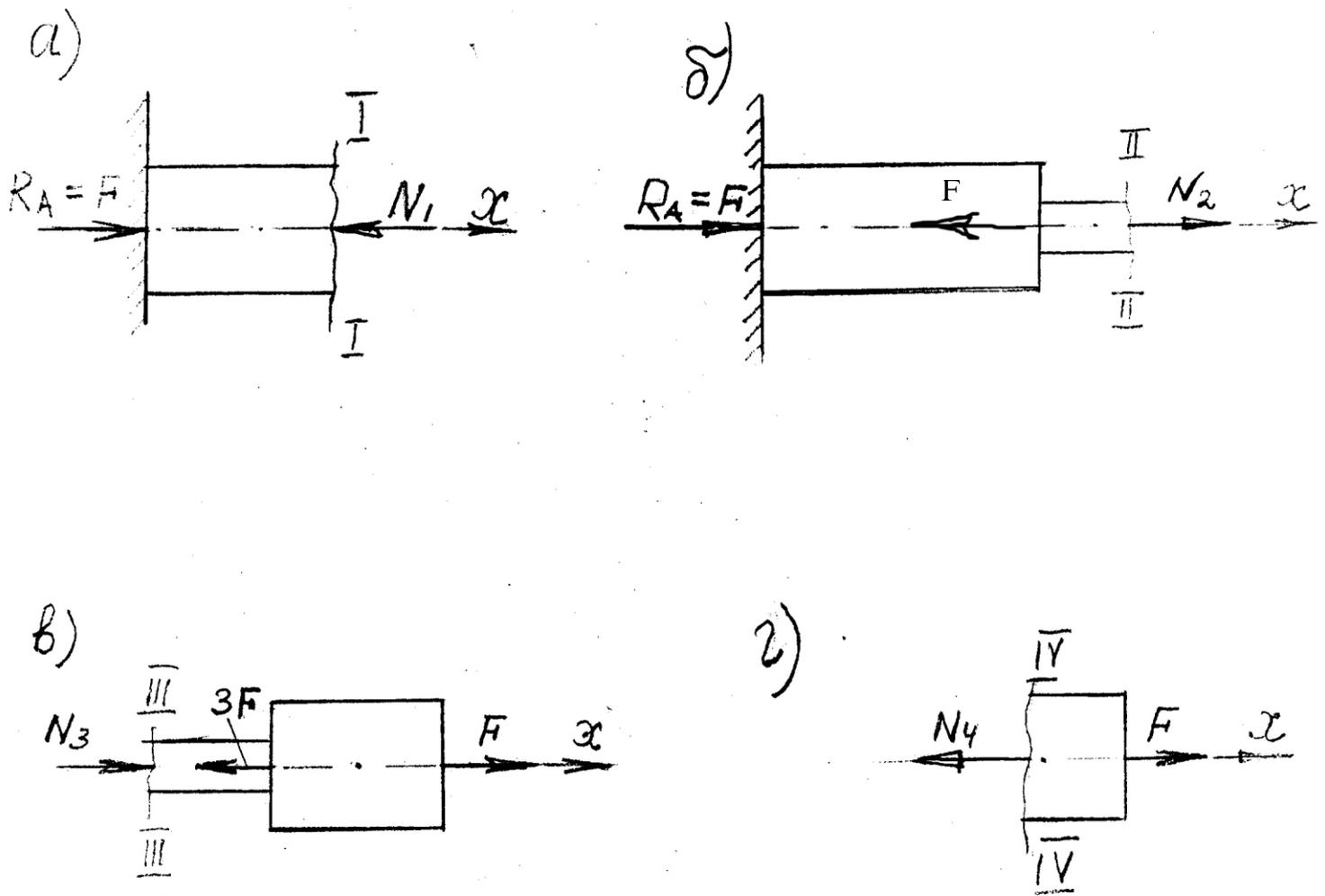
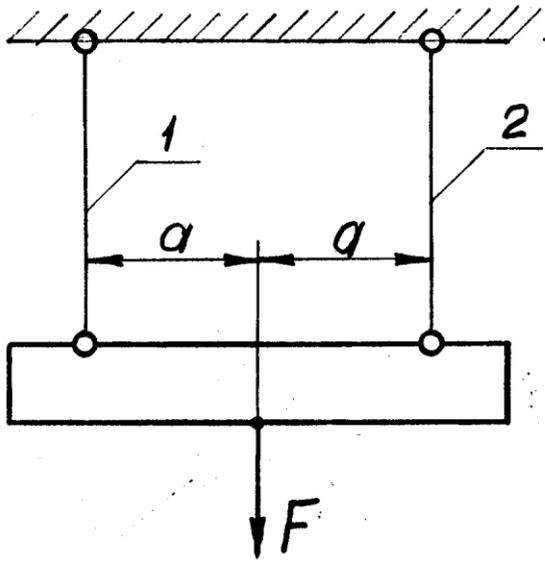


Рис. 2.5

a)



b)

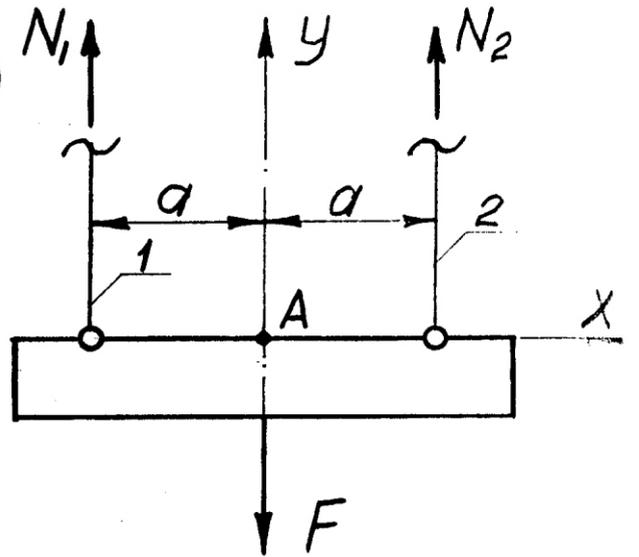


Рис. 3.1

Данная стержневая система является статически определимой, т.к. для определения неизвестных усилий N_1 и N_2 достаточно уравнений равновесия.

Статически неопределимой называется система, в которой неизвестные усилия в стержнях и реакции в закреплениях нельзя определить с помощью уравнений равновесия.

Степень статической неопределимости конструкции определяется как разница между числом неизвестных усилий и числом возможных для данной задачи уравнений равновесия.

Для решения статически неопределимых систем приходится составлять дополнительные уравнения, рассматривая картину деформации стержней (диаграмму перемещений) и устанавливая связь между деформациями стержней. Эти уравнения носят название *уравнений совместности деформаций*.

3.2. Ход решения статически неопределимых систем

Пример 3. Покажем усилия, возникающие в стержнях под действием силы (рис. 3.2а,б). Составим условия равновесия:

$$\sum x: 0 = 0;$$

$$\sum y: N_1 + N_2 + N_3 - F = 0;$$

$$\sum M_{(A)}: N_1 \cdot a - N_3 \cdot a = 0, \quad N_1 = N_3;$$

$$2N_1 + N_2 = F.$$

Имеем три неизвестных усилия и два возможных уравнения равновесия (уравнение $\sum x$ обращается в тождество $0 = 0$). Система один раз статически неопределима. Покажем диаграмму перемещений, т.е. изобразим схему конструкции после ее деформации (рис. 3.2в).

Уравнение совместности деформаций будет иметь вид:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3.$$

Деформации выражаем по закону Гука

$$\Delta_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}; \quad \Delta_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}$$

и подставим в уравнение совместности деформации

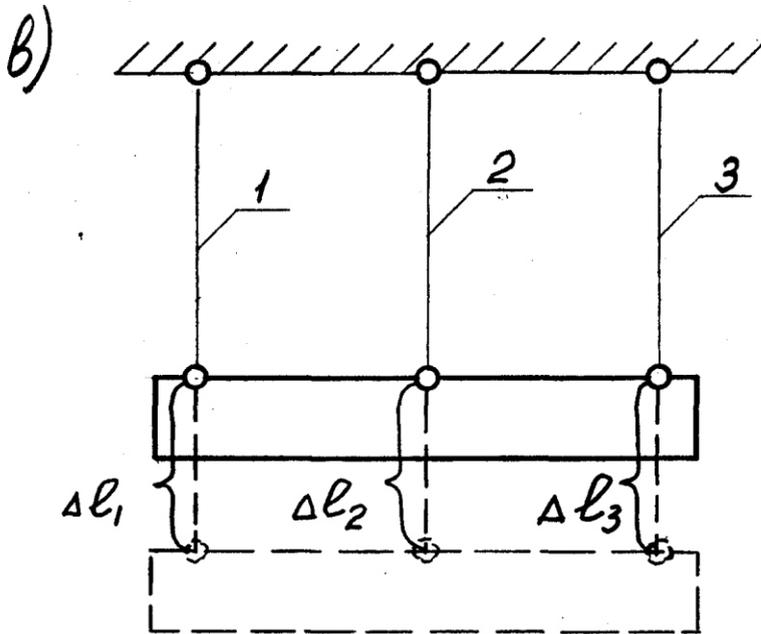
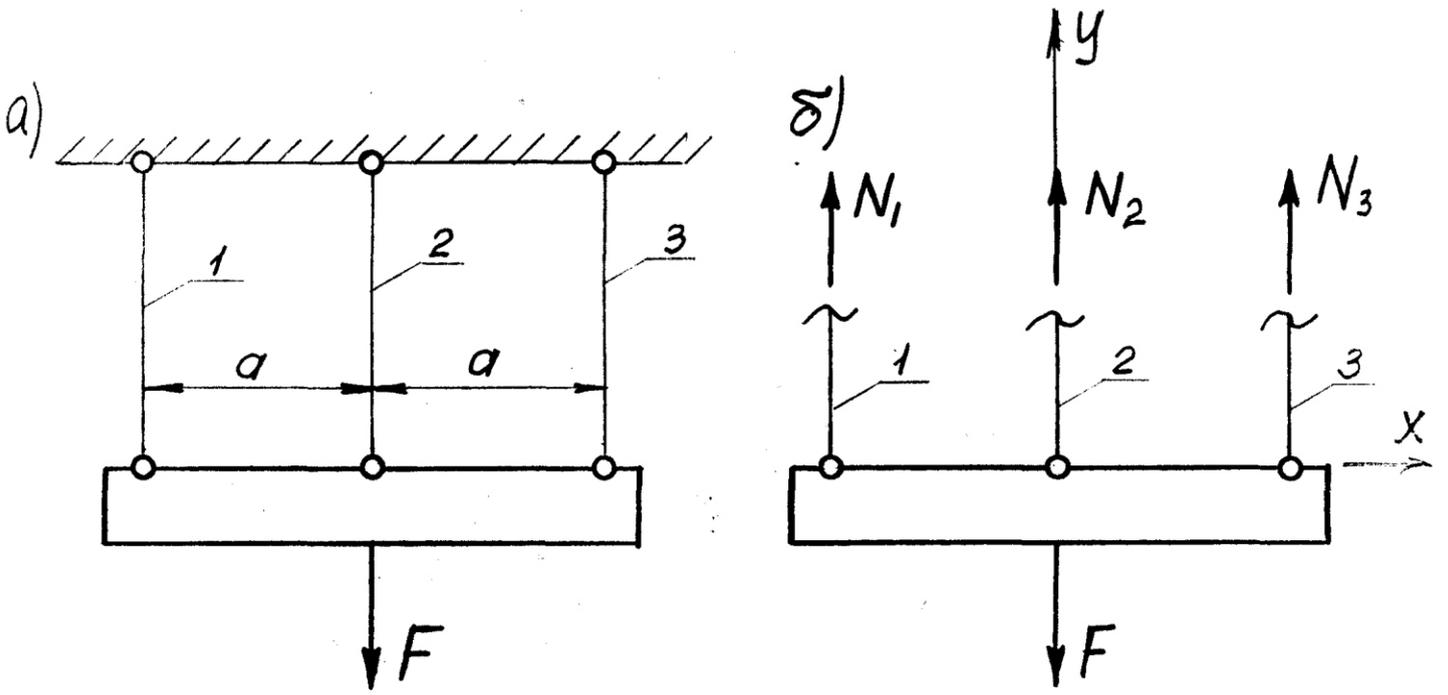


Рис. 3.2

$$\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}, \quad N_1 = N_2 \frac{E_1 A_1 l_2}{E_2 A_2 l_1}.$$

Решение системы полученных уравнений дает возможность определить неизвестные усилия

$$\begin{cases} 2N_1 + N_2 = F, \\ N_1 = N_2 \frac{E_1 A_1 l_2}{E_2 A_2 l_1}. \end{cases}$$

Далее, в зависимости от типа задачи, могут быть определены либо напряжения в стержнях, либо действующая на конструкцию нагрузка F , либо подобраны площади поперечных сечений стержней.

3.3. Порядок выполнения расчетно-графического задания

Абсолютно жесткий брус AB , шарнирно закрепленный в сечении C , подвешен с помощью медного 1 и стального 2 стержней и нагружен силой F (рис. 3.3а). $A_1 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, $E_1 = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $[\sigma]_1 = 120 \text{ МПа}$, $l_1 = 1 \text{ м}$, $A_2 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, $E_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $[\sigma]_2 = 160 \text{ МПа}$, $l_2 = 2 \text{ м}$. Определить наибольшую нагрузку, которую может выдержать конструкция.

Рассмотрим равновесие отсеченной части (рис. 3.3б). Покажем предполагаемое направление усилий в стержнях.

$$\sum x: H_A = 0,$$

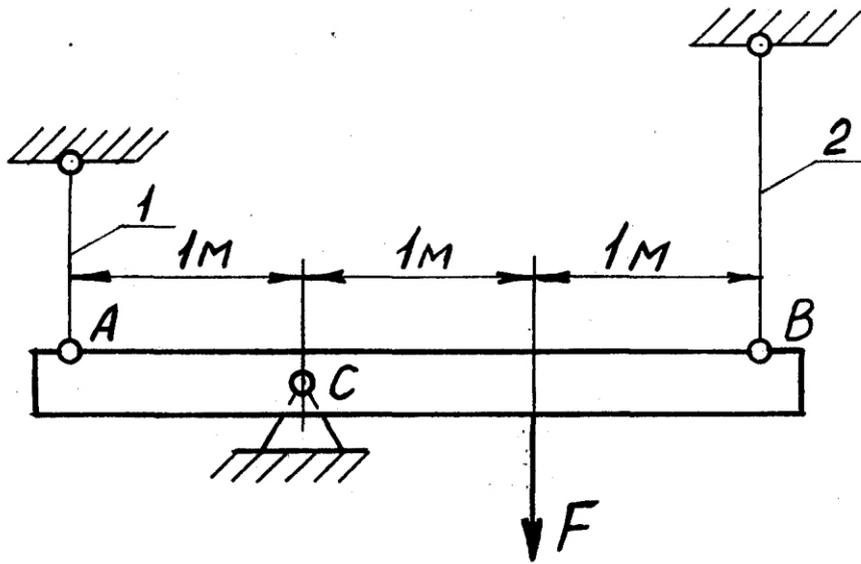
$$\sum y: N_2 + R_2 - F - N_1 = 0,$$

$$\sum M_{(c)}: N_1 \cdot 1 + N_2 \cdot 2 - F \cdot 1 = 0.$$

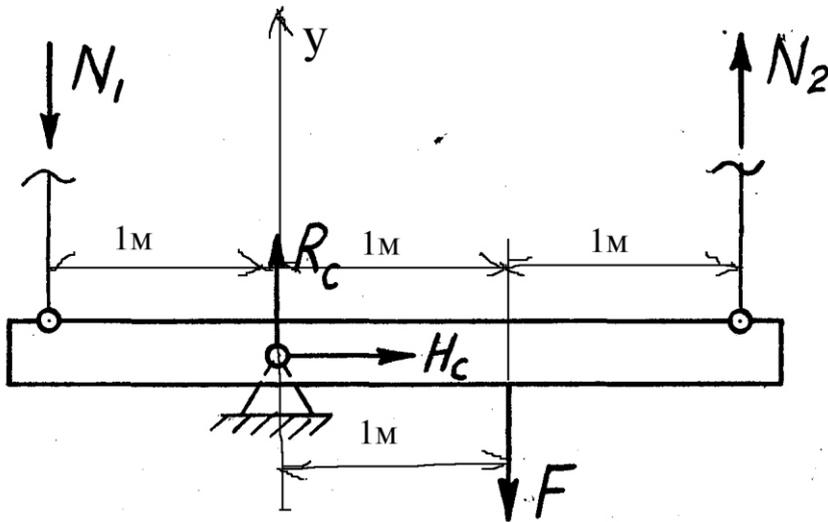
В данной задаче имеем четыре неизвестные: две реакции шарнирной опоры R_A и H_A и два усилия в стержнях N_1 и N_2 . Возможных уравнений равновесия три. Следовательно, задача один раз статически неопределима.

Рассмотрим диаграмму перемещений на рис. 3.3в. При повороте вокруг опоры C , брус AB займет положение $A_1 B_1$, при этом точки A и B переместятся по дугам окружности с радиусами AC и BC . Для упрощения решения задачи с достаточной степенью точности можно предположить, что указанные точки перемещаются по продольным осям стержней, т.е. по направлениям AA_1 и BB_1 . Как видно, отрезок AA_1 представляет собой укорочение стержня 1, а отрезок BB_1 удлинение стержня 2.

a)



b)



b)

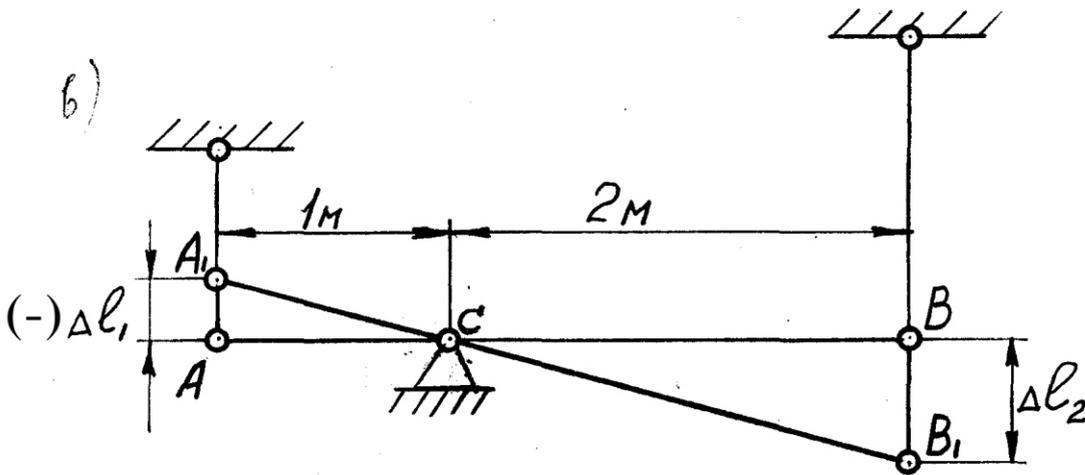


Рис. 3.3

$$\frac{BB_1}{AA_1} = \frac{BC}{AC}, \text{ поэтому } \frac{\Delta l_2}{(-\Delta l_1)} = \frac{2}{1}, \text{ или}$$

$$\Delta l_2 = 2(-\Delta l_1),$$

$$\frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = -2 \frac{(-N_1) l_1}{E_1 A_1}, \text{ учитывая что}$$

$$\frac{N_1}{A_1} = \sigma_1, \frac{N_2}{A_2} = \sigma_2, \text{ имеем}$$

$$\frac{\sigma_2 l_2}{E_2} = 2 \frac{\sigma_1 l_1}{E_1}.$$

Подставим числовые значения

$$\frac{\sigma_2 \cdot 2}{2 \cdot 10^5} = 2 \frac{\sigma_1 \cdot 1}{1 \cdot 10^5},$$

откуда получаем уравнение связи между напряжениями в стержнях конструкции: $\sigma_2 = 2\sigma_1$. Если положить, что в первом стержне напряжение станет равным допускаемому напряжению материала стержня, т.е. $[\sigma]_1 = 120$ МПа, то во втором стержне, будем иметь $\sigma_2 = 2[\sigma]_1 = 2 \cdot 120 = 240$ МПа, а это больше, чем допускаемое напряжение материала второго стержня $[\sigma]_2 = 160$ МПа. Следовательно, такое назначение напряжений в стержнях конструкции недопустимо. Полагаем $\sigma_2 = [\sigma]_2 = 160$ МПа, тогда $\sigma_1 = [\sigma]_2 / 2 = 160 / 2 = 80$ МПа. Итак, в процессе работы конструкции первый стержень остается недогруженным, а во втором стержне напряжения равны допускаемому значению. Полученные значения напряжений $\sigma_1 = 80$ МПа, $\sigma_2 = 160$ МПа подставляем в уравнение моментов.

$$\sum M_{(c)} = N_1 + 2N_2 = F;$$

$$\sigma_1 A_1 + 2\sigma_2 A_2 = F.$$

$$F = 80 \cdot 1 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 160 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 72 \cdot 10^{-3} \text{ мН} = 72 \text{ кН}.$$

Для этой же расчетной схемы рассмотрим задачу по определению площадей стержней A_1 и A_2 , пусть $F = 360$ кН, и $A_2 / A_1 = 2$.

В этом случае, получив расчетные значения напряжений в стержнях конструкции $\sigma_1 = 80$ МПа, $\sigma_2 = 160$ МПа, решаем уравнение моментов относительно искомых площадей.

$$A_2 = 2A_1.$$

$$\sigma_1 A_1 + 4\sigma_2 A_1 = F.$$

$$A_1 = F / (\sigma_1 + 4\sigma_2) = 360 / (80 + 4 \cdot 160) \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

$$A_2 = 2A_1 = 10 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

4. Кручение стержней кругового поперечного сечения

Кручением называется деформация, которая возникает в результате действия пар сил образующих момент M , который действует в плоскости поперечного сечения стержня.

4.1. Крутящий момент. Эпюра крутящего момента

Стержень нагружен моментом M . (рис. 4.1а). Рассмотрим равновесие отсеченной части стержня (метод сечений), (рис. 4.1б). В рассматриваемом сечении возникают касательные силы упругости, лежащие в плоскости поперечного сечения. Элементарная касательная сила упругости образует момент относительно продольной оси стержня x . Результирующий момент элементарных моментов касательных сил упругости в данном сечении называют **крутящим моментом**. Определим значение крутящего момента из уравнения равновесия для отсеченной части.

$$\sum m(x): M_x - M = 0. \quad M_x = M.$$

Крутящий момент равен алгебраической сумме моментов, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения стержня.

Крутящий момент считается положительным, если с положительного направления оси x он виден действующим против движения часовой стрелки.

Рассмотрим вал (стержень, испытывающий деформацию кручения), жестко закрепленный одним концом и нагруженный моментами $M_1 = M$; $M_2 = 2M$; $M_3 = 7M$ (рис. 4.2а). Реактивный момент M_A , определяем из уравнения равновесия

$$\sum m(x) = -M_1 - M_2 + M_3 - M_A = 0.$$

$$M_A = -M_1 - M_2 + M_3 = 4M.$$

Определим величину крутящего момента на каждом расчетном участке, рассматривая равновесие левой отсеченной части.

1 участок (рис. 4.2б)

$$\sum m_x: -M_1 + M_{x_1} = 0;$$
$$M_{x_1} = M_1 = M.$$

2 участок (рис. 4.2в)

$$\sum m_x: -M_1 - M_2 + M_{x_2} = 0;$$
$$M_{x_2} = M_1 + M_2 = 3M.$$

3 участок (рис. 4.2г)

$$\sum m_x: -M_1 - M_2 + M_3 + M_{x_3} = 0;$$
$$M_{x_3} = M_1 + M_2 - M_3 = -4M.$$

Эпюра крутящего момента показана на рис. 4.2а.

4.2. Деформации и напряжения

Как показывают опыты, при кручении поперечные сечения стержней остаются плоскими и перпендикулярными продольной оси; расстояния между поперечными сечениями не изменяются и радиусы остаются прямыми.

В результате деформации кручения образующая ab займет положение a_1b (рис. 4.3). Угол γ называют *относительным сдвигом*. Угол φ называют *абсолютным углом закручивания*. $\theta = d\varphi / dx$ – *относительный угол закручивания*.

Продольные волокна стержня испытывают деформацию *чистого сдвига* (рис. 4.4), т.е. по граням элемента, выделенного у поверхности вала, возникают *касательные напряжения* τ . Закон Гука для чистого сдвига $\tau = G\gamma$, где G – модуль касательной упругости (характеристика упругих свойств материала).

Рассмотрим равновесие отсеченной части (рис. 4.1б). В поперечном сечении выделим элементарную площадку ΔA на расстоянии ρ от центра тяжести. Момент элементарной силы упругости $\tau\Delta A$ относительно оси x равен $\tau\Delta A\rho$, тогда крутящий момент

$$M_x = \int_A \tau \rho dA.$$

После преобразований [1] формула для вычисления касательных напряжений при кручении стержней круглого поперечного сечения принимает вид

$$\tau = \frac{M_x}{I_p} \rho, \quad (4.1)$$

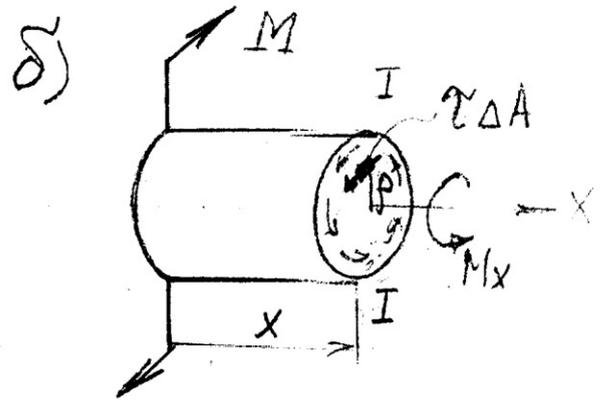
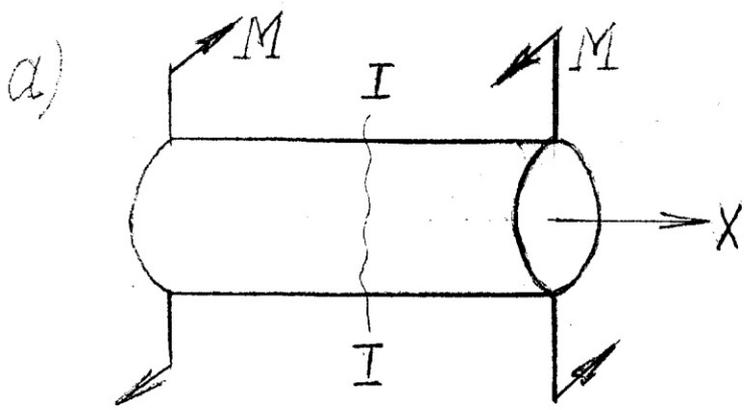


Рис. 4.1

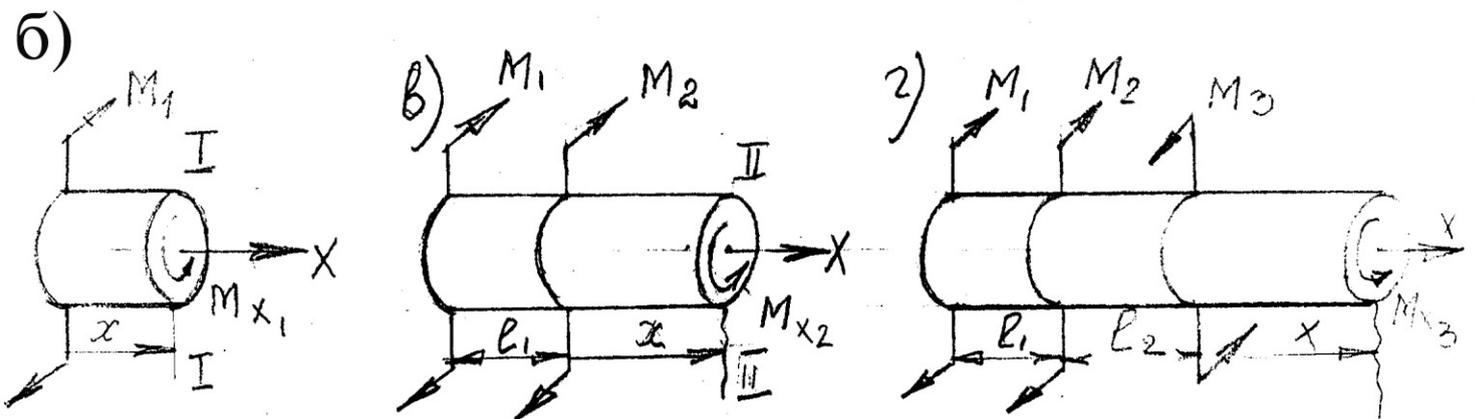
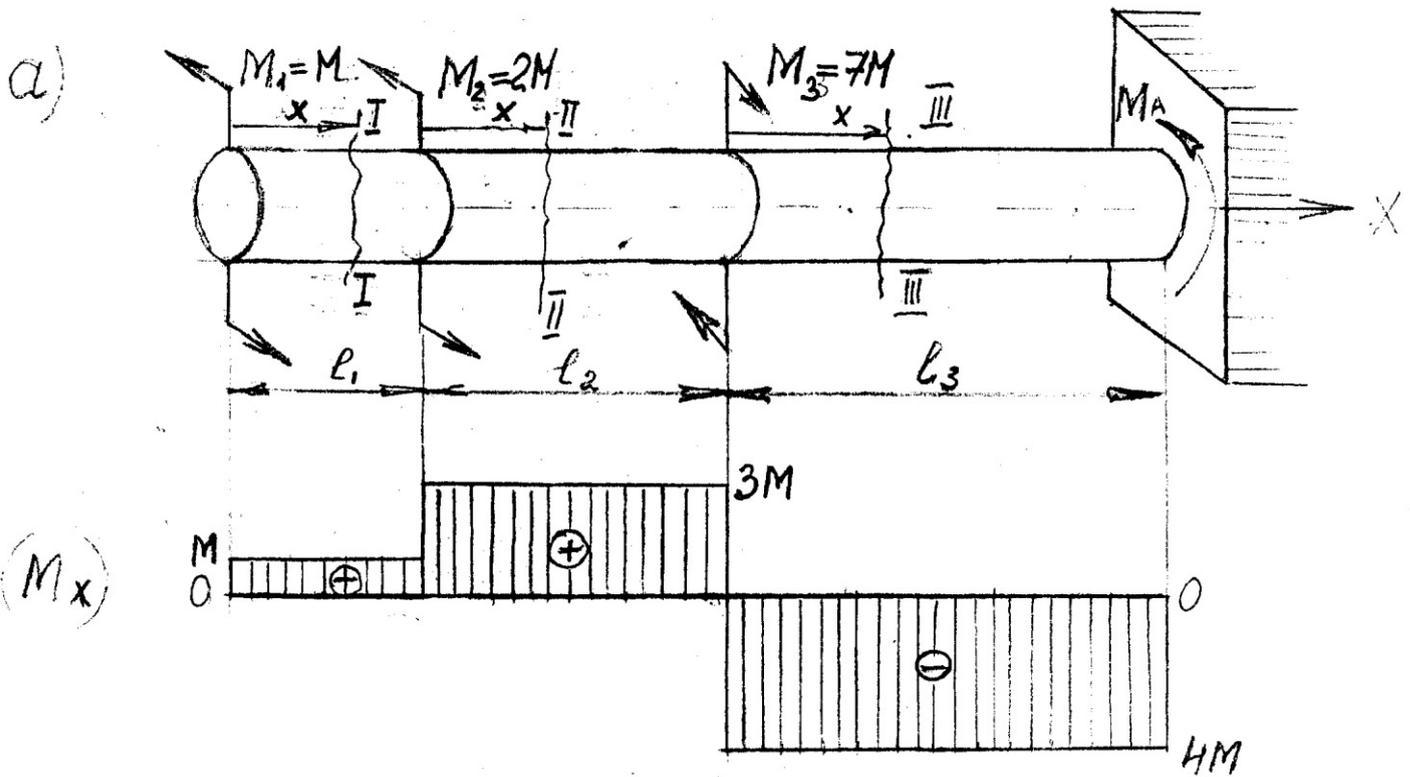


Рис. 4.2

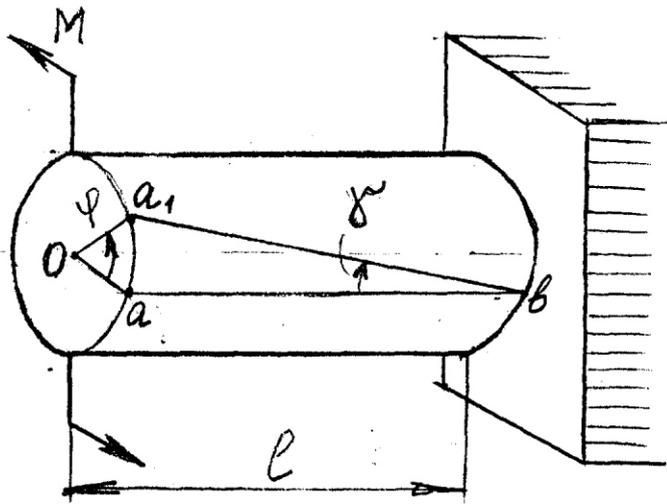


Рис. 4,3

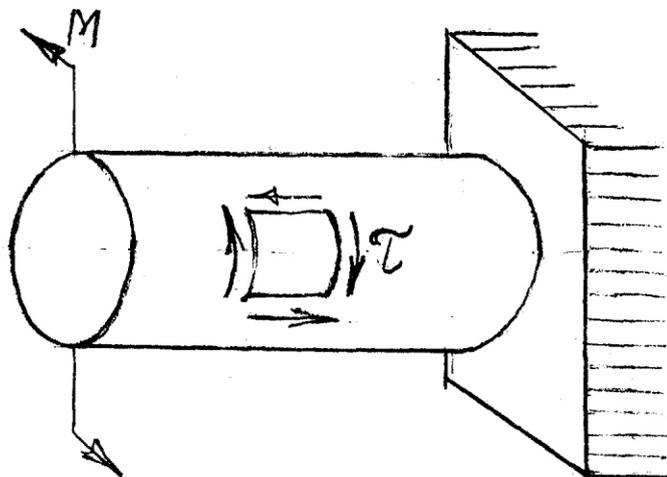


Рис. 4,4

где $I_p = \int_A \rho^2 dA$ – полярный момент инерции сечения – геометрическая характеристика.

Для круглого сечения $I_p = \frac{\pi r^4}{2}$;

для кольцевого сечения $I_p = \frac{\pi r^4}{2} (1 - \alpha^4)$, где $\alpha = \frac{r_{вн}}{r}$, $r_{вн}$ – внутренний радиус кольца.

График распределения касательных напряжений по диаметру вала показан на рис. 4.5.

При $\rho = 0$ $\tau = 0$;

При $\rho = r$ $\tau = \tau_{max}$.

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{I_p} \rho_{max}, \text{ где } \rho_{max} = r \text{ и } W_p = \frac{I_p}{r}.$$

W_p – полярный момент сопротивления. (геометрическая характеристика сечения).

Для круглого сечения $W_p = \frac{\pi r^3}{2}$,

для кольцевого сечения $W_p = \frac{\pi r^3}{2} (1 - \alpha^4)$.

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_p} \tag{4.2}$$

Условие прочности

$$\tau_{max} = \frac{|M_x|_{max}}{W_p} \leq [\tau], \tag{4.3}$$

где $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение для данного материала.

Наряду с расчетом на прочность выполняют расчет на жесткость. Мерой деформации при кручении является угол закручивания вала φ . По закону Гука:

$$\varphi = \frac{|M_x| l}{GI_p}, \tag{4.4}$$

где GI_p – жесткость вала.

Условие жесткости

$$\varphi = \frac{|M_{x \max}| l}{GI_p} \leq [\varphi], \quad (4.5)$$

где $[\varphi]$ – допускаемый угол закручивания назначается на основании нормативных документов.

4.3. Пример расчета вала на прочность и жесткость

На рис. 4.6. изображен вал, на который насажены четыре шкива. В сечениях насадки шкивов возникают моменты M_1 , M_2 , M_3 и M_4 за счет сил трения, обусловленных разностью сил натяжения в набегающей и сбегающей ветвях ременной передачи.

Таблица исходных данных

n	K_1	K_2	K_3	α	$[\tau]$	$[\varphi]$	G
об/мин	квт	квт	квт		кг/см ²	град/м	кг/см ²
100	100	50	50	0,6	800	0,4	$8 \cdot 10^5$

Подобрать размеры кольцевого сечения вала из условия прочности и жесткости. (Рис. 4.6).

Величина моментов M_1 , M_2 , M_3 определяется в зависимости от передаваемой валом мощности K и от скорости вращения вала n (об/мин).

$M = 973,6 \frac{K}{n}$, где 973,6 – числовой коэффициент, зависящий от размерностей исходных данных.

$$M_1 = 973,6 \frac{K_1}{n} = 973,6 \cdot \frac{100}{100} = 973,6 \text{ кГм.}$$

$$M_2 = 973,6 \frac{K_2}{n} = 973,6 \cdot \frac{50}{100} = 486,8 \text{ кГм.}$$

$$M_3 = 973,6 \frac{K_3}{n} = 973,6 \cdot \frac{50}{100} = 486,8 \text{ кГм.}$$

$$\sum m_x = M_1 + M_2 + M_3 - M_4 = 0.$$

$$M_4 = M_1 + M_2 + M_3 = 1947,2 \text{ кГм.}$$

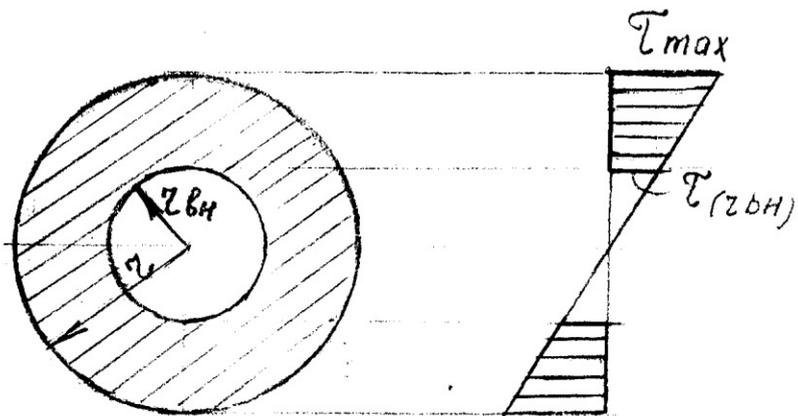


Рис. 4.5

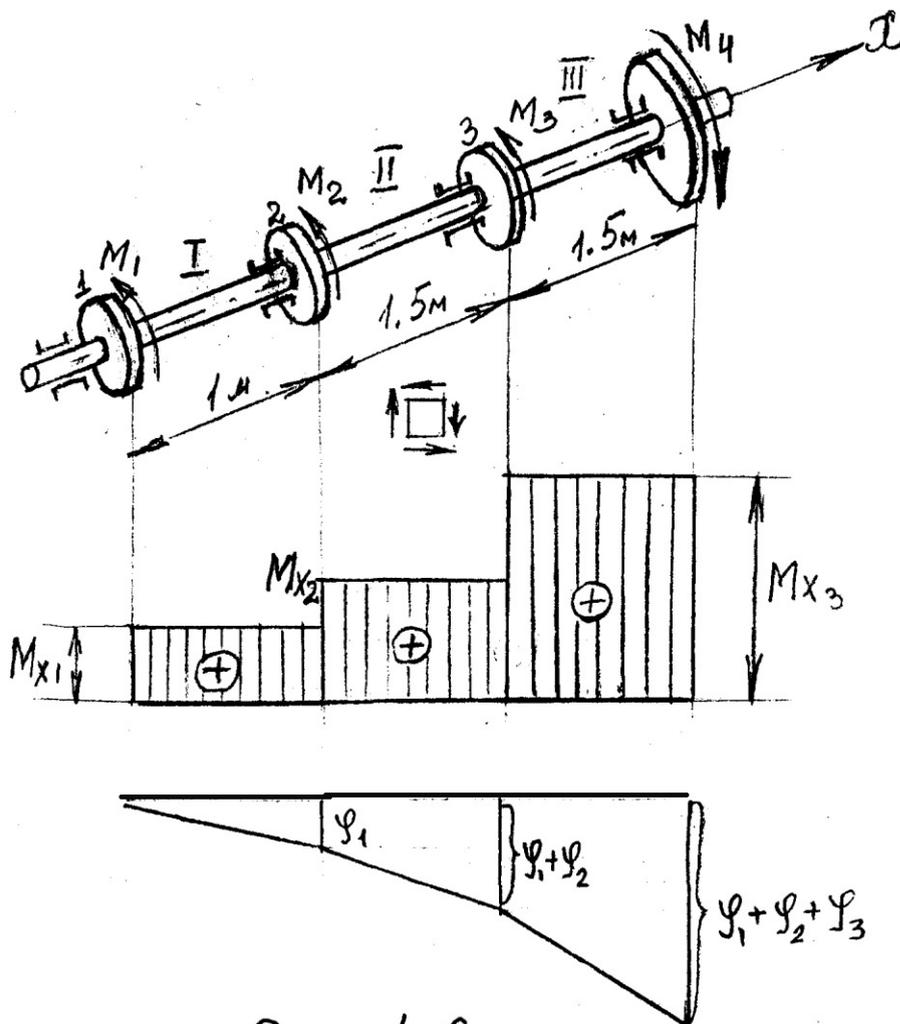


Рис. 4.6

Крутящие моменты на участках вала равны

$$M_{x_1} = M_1 = 973,6 \text{ кГм}$$

$$M_{x_2} = M_1 + M_2 = 1460,4 \text{ кГм}$$

$$M_{x_3} = M_1 + M_2 + M_3 = 1947,2 \text{ кГм.}$$

Эпюра крутящего момента показана на рис. 4.6.

Определим радиус вала:

а) из условия прочности (4.3)

$$|M_{x \max}| = M_{x_3} = 1947,2 \text{ кГм}$$

$$W_p \geq \frac{M_{x \max}}{[\tau]}$$

$$\frac{\pi r^3}{2} (1 - \alpha^4) \geq \frac{M_{x \max}}{[\tau]}, \text{ откуда}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{2M_{x \max}}{\pi \cdot [\tau] \cdot (1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 1947,2 \cdot 10^2}{3,14 \cdot 800 \cdot (1 - 0,6^4)}} = 5,6 \text{ см.}$$

б) из условия жесткости (4.4)

$$I_p \geq \frac{|M_{x \max}| l}{G \cdot [\varphi]} \cdot \frac{\pi r^4}{2} (1 - \alpha^4) \geq \frac{|M_{x \max}| l}{G \cdot [\varphi]}$$

$$r = \sqrt[4]{\frac{2|M_{x \max}| l}{\pi \cdot G \cdot (1 - \alpha^4) \cdot [\varphi]}}$$

В полученное выражение значение допускаемого угла закручивания подставляется в радианах на погонный метр, а $l = 1 \text{ м}$.

$$r = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 1947,2 \cdot 10^2 \cdot 10^2 \cdot 180}{3,14^2 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot (1 - 0,6^4) \cdot 0,4}} = 7,1 \text{ см.}$$

Из двух полученных значений радиуса выбираем наибольшее значение, т.е. $r = 7,1$ см. $r_{\text{вн}} = 0,6 \cdot 7,1 = 4,27$ см.

Определим полный угол закручивания.

$$\varphi_{\text{полн}} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3.$$

По формуле (4.4) имеем:

$$\varphi_1 = \frac{973,6 \cdot 10^2 \cdot 10^2 \cdot 2}{8 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 7,1^4 \cdot (1 - 0,6^4)} = 0,0035 \text{ рад.}$$

$$\varphi_2 = \frac{1460,4 \cdot 10^2 \cdot 1,5 \cdot 10^2 \cdot 2}{8 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 7,1^4 \cdot (1 - 0,6^4)} = 0,008 \text{ рад.}$$

$$\varphi_3 = \frac{1947,2 \cdot 10^2 \cdot 1,5 \cdot 10^2 \cdot 2}{8 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 7,1^4 \cdot (1 - 0,6^4)} = 0,011 \text{ рад.}$$

$$\varphi_{\text{полн}} = (0,0035 + 0,008 + 0,011) = 0,0225 \text{ рад.}$$

4.4. Расчет статически неопределимого вала.

Стержень круглого поперечного сечения жестко закреплен обоими концами; в сечениях закрепления A и B возникают реактивные моменты M_A и M_B . (рис. 4.7).
Дано: $a = 0,6$ м; $b = 0,8$ м; $M = 800$ кгм; $d = 0,10$ м; $[\tau] = 800$ кг/см²; $G = 8 \cdot 10^5$ кг/см²; $[\varphi] = 0,6$ град/м.

Уравнение равновесия:

$$\sum m(x) = M_A - M - 2M + M_B = 0.$$

$$M_A + M_B = 3M.$$

Стержень является один раз статически неопределимым, т.к. имеем два неизвестных M_A , M_B и одно возможное уравнение равновесия. Запишем уравнение совместности деформаций

$$\varphi_{\text{полн}} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0,$$

т.к. взаимный поворот сечений A и B невозможен в силу их жесткого закрепления.

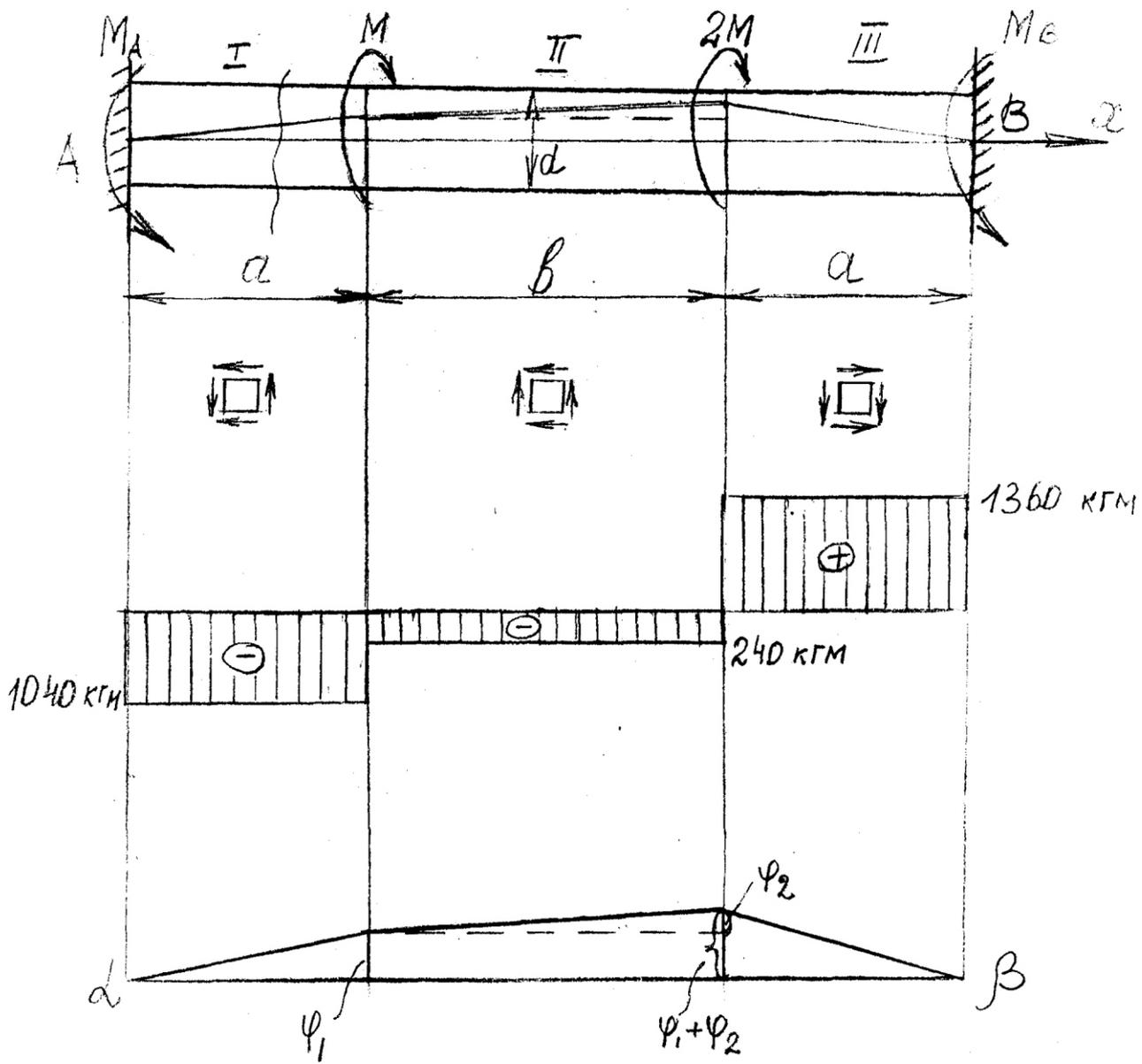


Рис. 4.7

По закону Гюка

$$\varphi_1 = \frac{M_{x_1} l_1}{GI_p} = \frac{(-M_A)a}{GI_p}$$

$$\varphi_2 = \frac{M_{x_2} l_2}{GI_p} = \frac{(-M_A + M)b}{GI_p}$$

$$\varphi_3 = \frac{M_{x_3} l_3}{GI_p} = \frac{(-M_A + 3M)a}{GI_p}$$

$$\varphi_{полн} = -\frac{M_A a}{GI_p} + \frac{(-M_A + M)b}{GI_p} + \frac{(-M_A + 3M)a}{GI_p} = 0.$$

Откуда

$$M_A = \frac{M(b + 3a)}{2a + b} = \frac{800 \cdot (0,8 + 3 \cdot 0,6)}{2 \cdot 0,6 + 0,8} = 1040 \text{ кгм.}$$

$$M_B = 3M - M_A = 2400 - 1040 = 1360 \text{ кгм.}$$

Эпюра крутящих моментов показана на рис. 4.7.

Проверим прочность вала.

$$W_p = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{3,14 \cdot 5^3}{2} = 200 \text{ см}^3.$$

$$\tau_{max} = \frac{1360 \cdot 10^2}{200} = 680 \text{ кг/см}^2 < [\tau] = 800 \text{ кг/см}^2.$$

График угла закручивания приведен на рис. 4.7.

$$GI_p = 8 \cdot 10^5 \cdot \frac{3,14 \cdot 5^4}{2} = 8 \cdot 10^8 \text{ кгсм}^2.$$

$$\varphi_1 = -\frac{1040 \cdot 60}{8 \cdot 10^8} = -7,6 \cdot 10^{-5} \text{ рад.}$$

$$\varphi_2 = -\frac{240 \cdot 80}{8 \cdot 10^8} = -2,4 \cdot 10^{-5} \text{ рад.}$$

$$\varphi_3 = \frac{1360 \cdot 60}{8 \cdot 10^8} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Проверим жесткость вала.

$$|\varphi_{max}| = \varphi_3 = 10 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

$$[\varphi] = 0,6 \text{ град/м} = 10,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

$$|\varphi_{max}| < [\varphi].$$

5. Плоский изгиб

5.1. Основные понятия

Изгибом называют деформацию стержня, вызванную силами, приложенными в плоскости, проходящей через продольную ось стержня.

Изгиб будет плоским в результате действия сил, приложенных в плоскости симметрии стержня (рис. 5.1)

Стержень, испытывающий деформацию изгиба называют *балкой*. Геометрическая ось балки в случае плоского изгиба принимает форму плоской кривой, лежащей в плоскости действия внешних сил.

Виды закрепления балок. Нагрузки и реакции связей

Схема конструкции закрепления балок может быть приведена к одному из трех *видов*:

- а) Шарнирно – подвижная опора;
(рис. 5.2а – левая опора);
- б) Шарнирно – неподвижная опора;
(рис. 5.2а – правая опора);
- в) Жесткая заделка, (рис. 5.2.б).

На рисунке 5.2а показана двухопорная балка. Расстояние между опорами называют *пролетом*. Балка, изображенная на рис. 5.2б называется *консольной балкой*. На рис. 5.2в дан пример разрезной балки с промежуточным шарниром.

Действующие на балку нагрузки могут быть приведены к сосредоточенным силам F , сосредоточенным моментам M и равномерно распределенной по длине балки нагрузке q , (рис. 5.2). В зависимости от конструкции закрепления балки, при действии на нее внешних сил, возникают реакции в закреплениях (R_A , H_A , R_B , H_B и M_A) (рис. 5.2.). При расчете балки на прочность нужно знать все действующие на нее внешние силы, включая и реакции. Реакции определяются через заданные нагрузки из уравнений равновесия. Как известно, для плоской системы можно составить три уравнения равновесия:

$$\sum x = 0, \quad \sum y = 0, \quad \sum M = 0.$$

Этих уравнений всегда достаточно для определения всех реакций в балках рассмотренных видов (рис. 5.2). Балки называют статически определимыми, если возникающие реакции закреплений могут быть определены с помощью только уравнений *статики*.

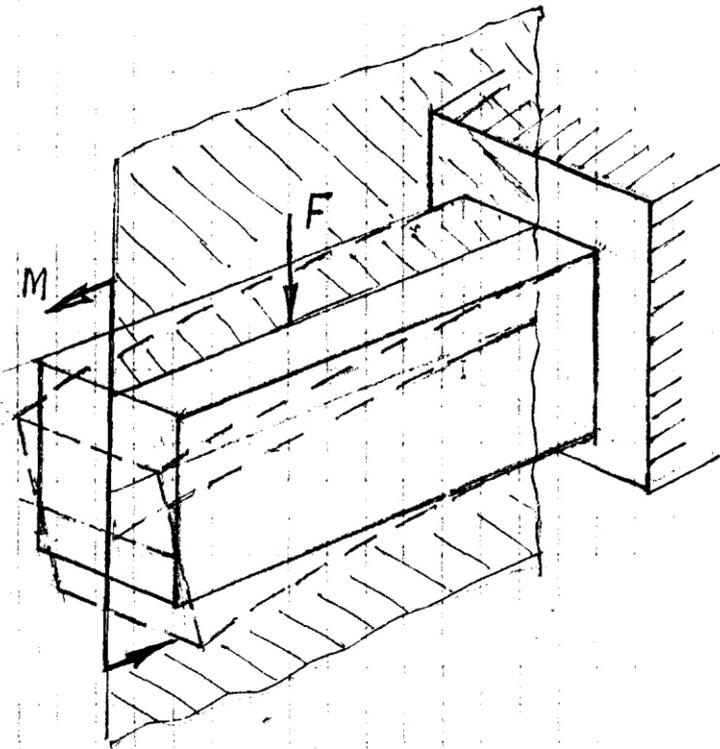
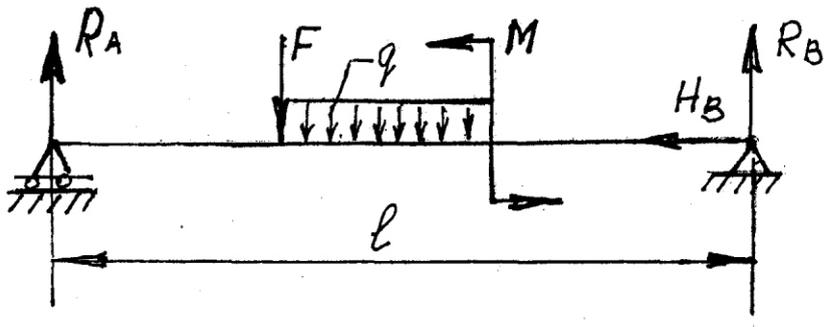
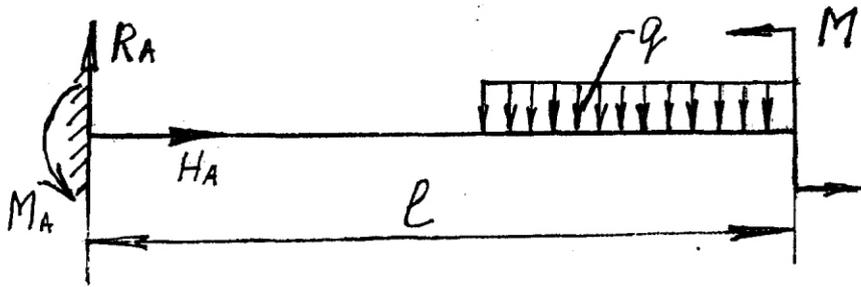


Рис. 5.1

a)



б)



в)

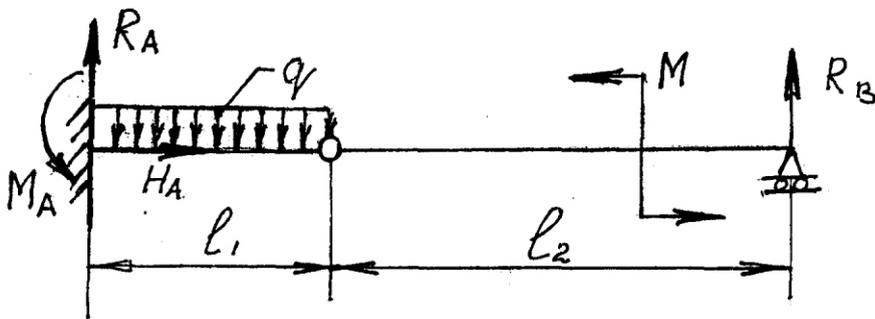


Рис. 5.2

5.2. Внутренние силовые факторы. Метод сечений. Изгибающий момент и поперечная сила

Рассмотрим консольную балку, нагруженную системой сил (рис. 5.3а).

Проведем мысленно сечение, перпендикулярное продольной оси балки и рассмотрим равновесие любой отсеченной части (рис. 5.3б). В рассматриваемом сечении проведем оси: x – геометрическая ось балки; y, z – оси, лежащие в плоскости рассматриваемого сечения балки. (y – ось симметрии, z – ось, проходящая через центр тяжести). Как видно, равновесия отсеченной части балки не наблюдается, следовательно в сечении должны быть внутренние силы, уравнивающие внешнюю нагрузку. Этими внутренними силами являются нормальные и касательные силы упругости, возникающие между элементарными частицами материала, в результате изменения расстояния между ними при воздействии на тело внешней нагрузки.

Q_y – равнодействующая касательных сил упругости, ее называют **поперечной силой** в данном сечении балки.

M_z – результирующий момент элементарных моментов нормальных сил упругости относительно оси z , его называют **изгибающим моментом**.

Составим уравнения равновесия для отсеченной части балки:

$$\sum x: 0 = 0;$$

$$\sum y: -F - q \cdot a + Q_y = 0;$$

$$Q_y = qa + F;$$

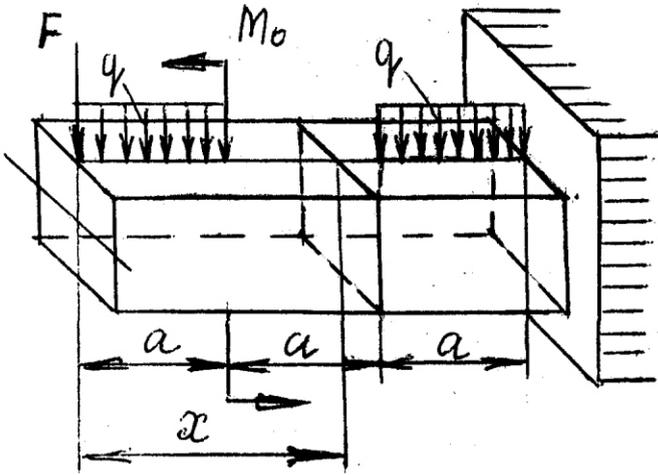
$$\sum M_{(z)}: +Fx + qa\left(x - \frac{a}{2}\right) + M_0 - M_z = 0;$$

$$M_z = M + Fx + qa\left(x - \frac{a}{2}\right);$$

Поперечная сила Q_y численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил на ось y , расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения;

Изгибающий момент M_z численно равен алгебраической сумме моментов относительно оси z всех внешних сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

a)



б)

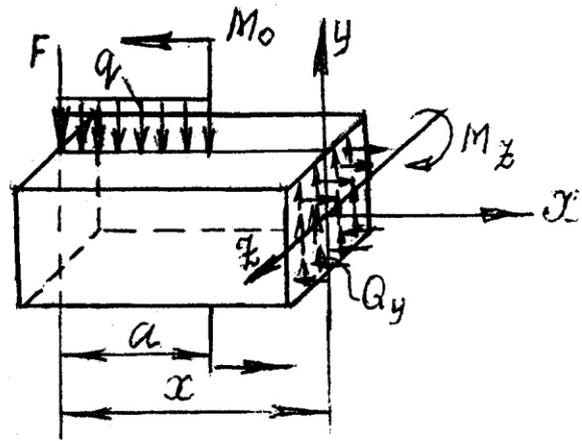
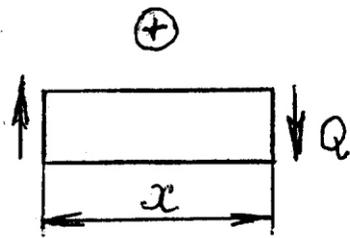


Рис. 5.3

a)



б)

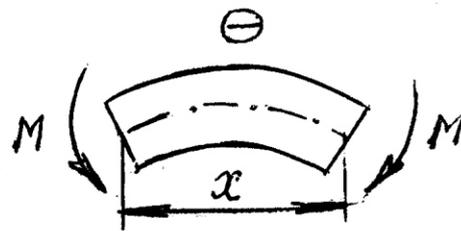
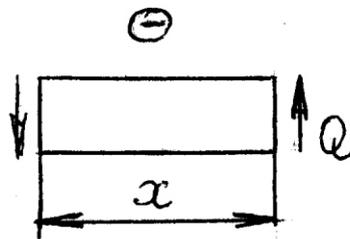
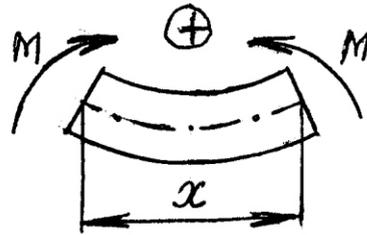


Рис. 5.4

Сила, расположенная справа от рассматриваемого сечения, направленная вниз и сила, расположенная слева от сечения, направленная вверх считаются положительными (рис. 5.4а);

Момент, приложенный слева от сечения, действующий по движению часовой стрелки и момент, приложенный справа от сечения, действующий против движения часовой стрелки считаются положительными (рис. 5.4б).

5.3. Эпюры поперечной силы и изгибающего момента

Эпюрами поперечной силы и изгибающего момента называют графики распределения указанных силовых факторов по длине балки.

Пример 1. Рассмотрим консольную балку (рис. 5.5), нагруженную равномерно распределенной нагрузкой, сосредоточенной силой и моментом. Приложенная к балке нагрузка делит ее на два расчетных участка. Расчетным участком называют часть длины балки в пределах которой не происходит изменения внешней нагрузки или размеров сечения.

Проведем сечение на некотором расстоянии x от свободного конца балки и запишем уравнения поперечной силы и изгибающего момента для первого участка балки. Согласно принятым правилам знаков эти уравнения принимают вид:

1 участок $0 \leq x \leq 2$ м.

$$Q_y(x) = F - qx = 30 - 10x;$$

$$M_z(x) = Fx - q \frac{x^2}{2} = 30x - 5x^2.$$

Вычислим значения поперечной силы и изгибающего момента на границах участка:

$$x = 0: Q_y = +30 \text{ кН}, M_z = 0;$$

$$x = 2 \text{ м}: Q_y = +10 \text{ кН}, M_z = 40 \text{ кНм}.$$

Уравнения поперечной силы и изгибающего момента для второго расчетного участка запишем, рассматривая равновесие левой отсеченной части балки. Сечение проведем на расстоянии x от начала второго участка:

2 участок $0 \leq x \leq 1$ м.

$$Q_y(x) = F - q \cdot 2 = 30 - 20 = 10 \text{ кН};$$

$$M_z(x) = F \cdot (2 + x) - q \cdot 2 \cdot (1 + x) - M = 30(2 + x) - 20(1 + x) - 60;$$

$$x = 0: Q_y = +10 \text{ кН}, M_z = -20 \text{ кНм};$$

$$x = 1 \text{ м}: Q_y = +10 \text{ кН}, M_z = -10 \text{ кНм}.$$

Как видно из примера, при расчете консольной балки, можно не определять реакции закреплений в том случае, если при составлении уравнений для всех расчетных участков рассматривается равновесие свободного конца.

Перейдем к построению эпюр. Проведем две линии, параллельные оси балки, которые будут осями абсцисс графиков $Q_y(x)$ и $M_z(x)$. На первом участке балки уравнение поперечной силы представляет собой уравнение прямой, а изгибающий момент изменяется по закону квадратичной параболы, знак кривизны которой определяется по знаку второй производной от изгибающего момента. На втором участке поперечная сила имеет постоянное значение, а изгибающий момент изменяется по линейному закону.

Эпюры поперечной силы и изгибающего момента штрихуются вертикальными линиями, представляющими ординаты этих эпюр, т.е. значения Q_y и M_z в любом сечении балки. На эпюрах указывают знаки, а также значения Q_y и M_z в характерных сечениях (т.е. на границах участков).

5.4. Дифференциальные зависимости между поперечной силой, изгибающим моментом и равномерно распределенной нагрузкой. (Теорема Журавского).

Уравнение поперечной силы является первой производной от изгибающего момента, а первая производная от уравнения поперечной силы равна распределенной нагрузке.

$$\frac{dM_z}{dx} = Q_y; \quad \frac{dQ_y}{dx} = q_y. \quad (5.1)$$

Для доказательства теоремы рассмотрим элемент балки, выделенный двумя поперечными сечениями, проведенными на бесконечно малом расстоянии dx друг от друга, (рис. 5.6).

Составим для выделенного элемента уравнения равновесия:

$$\sum y: Q_y - (Q_y + dQ_y) + qdx = 0;$$

$$\sum M(z): -Q_y dx + (M_z + dM_z) - M_z - qdx \frac{dx}{2} = 0.$$

Из первого уравнения получаем

$$q = \frac{dQ_y}{dx}.$$

Во втором уравнении отбрасываем бесконечно малую высшего порядка $q \frac{dx^2}{2}$ и получаем

$$Q_y = \frac{dM_z}{dx}.$$

Очевидно, что

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} = \frac{dQ_y}{dx} = q.$$

Полученные зависимости (5.1) применяют для контроля правильности построения эпюр.

5.5. Контроль правильности построения эпюр.

1. На участках балки, свободных от равномерно распределенной нагрузки поперечная сила остается постоянной, а изгибающий момент меняется по линейному закону.

2. На участках балки с равномерно распределенной нагрузкой поперечная сила меняется по линейному закону, а эпюра изгибающего момента ограничена квадратичной параболой, направление кривизны которой определяется по знаку второй производной от изгибающего момента (Выпуклость параболы направлена навстречу стрелкам равномерно распределенной нагрузки).

3. В сечениях балки, где поперечная сила меняет знак, т.е. при $Q_y = 0$, изгибающий момент принимает экстремальные значения:

$$M_z = \max M_z, \text{ при перемене знака } Q_y \text{ с плюса на минус, и}$$

$$M_z = \min M_z, \text{ при перемене знака } Q_y \text{ с минуса на плюс.}$$

4. На участках балки с положительной поперечной силой изгибающий момент возрастает, с отрицательной поперечной силой – убывает.

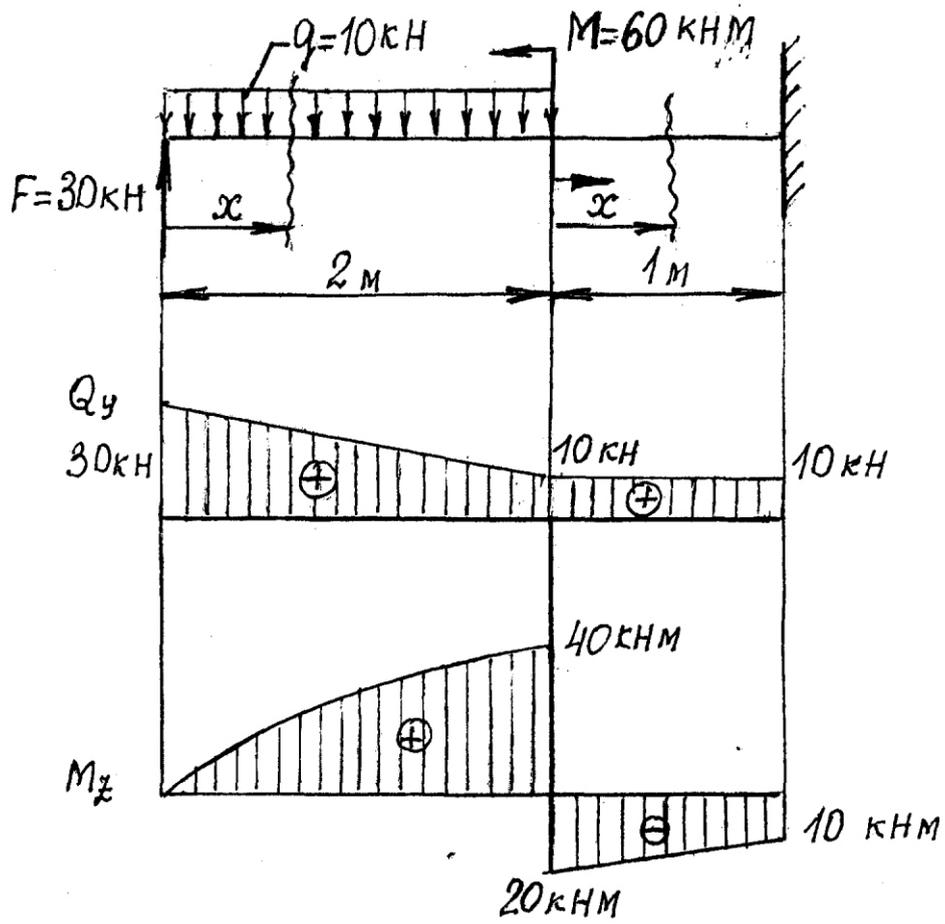


Рис. 5.5

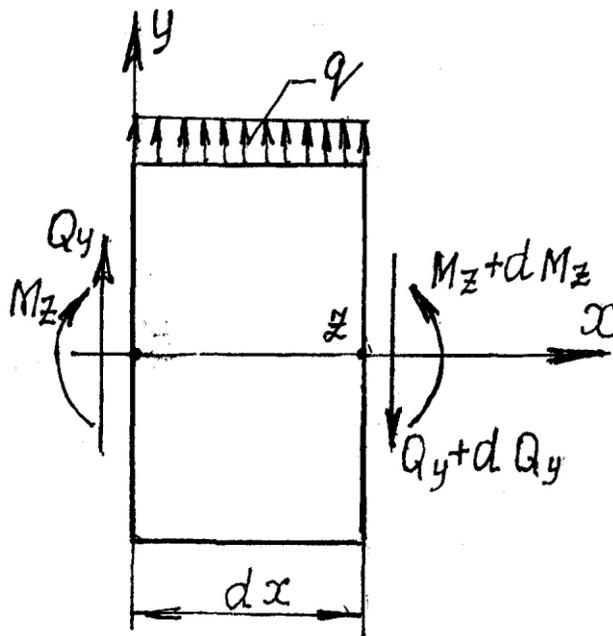


Рис. 5.6

5. На участках балки с нулевым значением поперечной силы изгибающий момент остается постоянным. Такой случай изгиба (при $Q_y = 0$, $M_z = const$), называют **чистым изгибом**.

6. В сечениях балки, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре поперечной силы скачок на величину и в направлении этой силы.

7. В сечениях приложения сосредоточенного момента на эпюре изгибающего момента скачок на величину этого момента.

Пример 2. Рассмотрим двухопорную балку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой q , сосредоточенной силой F и сосредоточенным моментом M . (рис. 5.7).

При построении эпюр для двухопорных балок решение задачи следует начинать с определения реакций в опорах.

Составим уравнения равновесия:

$$\sum M_{(A)}: R_B \cdot 4 + M + F \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 1 = 0;$$

$$4R_B = -40 - 60 + 60 = 0;$$

$$R_B = -\frac{40}{4} = -10 \text{ кН};$$

$$\sum M_{(B)}: -R_A \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 3 - F \cdot 1 + M = 0;$$

$$4R_A = 180 - 20 + 40;$$

$$R_A = \frac{200}{4} = 50 \text{ кН}.$$

При вычислении реакция R_A получена со знаком (+), что указывает на правильное ее направление; реакция R_B получена со знаком (-), следовательно направление ее выбрано неверно. Изменив направление реакции R_B на действительное, выполним проверку правильности значений реакций.

Проверка: $\sum y: R_A - q \cdot 2 + F - R_B = 0.$

$$50 - 30 \cdot 2 + 20 - 10 = 0.$$

$$0 = 0.$$

Переходим к построению эпюр.

В данной балке три расчетных участка.

1 участок $0 \leq x \leq 2$ м.

$$Q_y(x) = R_A - qx = 50 - 30x;$$

$$M_z(x) = R_A x - q \frac{x^2}{2} = 50x - 30 \frac{x^2}{2};$$

$$x = 0: Q_y = 50 \text{ кН}; M_z = 0;$$

$$x = 2 \text{ м}: Q_y = -10 \text{ кН}; M_z = 40 \text{ кНм}.$$

В сечении при $Q_y = 0$, $M_z = M_{z \max}$.

Определим положение этого сечения при $x = x^*$, приравняв уравнение поперечной силы к нулю, как первую производную от изгибающего момента.

$$Q_y = R_A - qx^* = 0;$$

$$x^* = \frac{R_A}{q} = \frac{50}{30} = 1,67 \text{ м};$$

$$M_{z \max} = R_A x^* - q \frac{(x^*)^2}{2} = 50 \cdot 1,67 - 30 \cdot \frac{1,67^2}{2} = 41,7 \text{ кНм}.$$

При составлении уравнений для Q_y и M_z на втором участке, рассмотрим равновесие правой отсеченной части балки. Отсчет координаты x ведется справа налево

2 участок $0 \leq x \leq 1$ м.

$$Q_y(x) = R_B - F = 10 - 20 = -10 \text{ кН};$$

$$M_z(x) = -R_B(1+x) + Fx + M = -10(1+x) + 20x + 40;$$

$$x = 0: M_z = 30 \text{ кНм};$$

$$x = 1 \text{ м}: M_z = 40 \text{ кНм}.$$

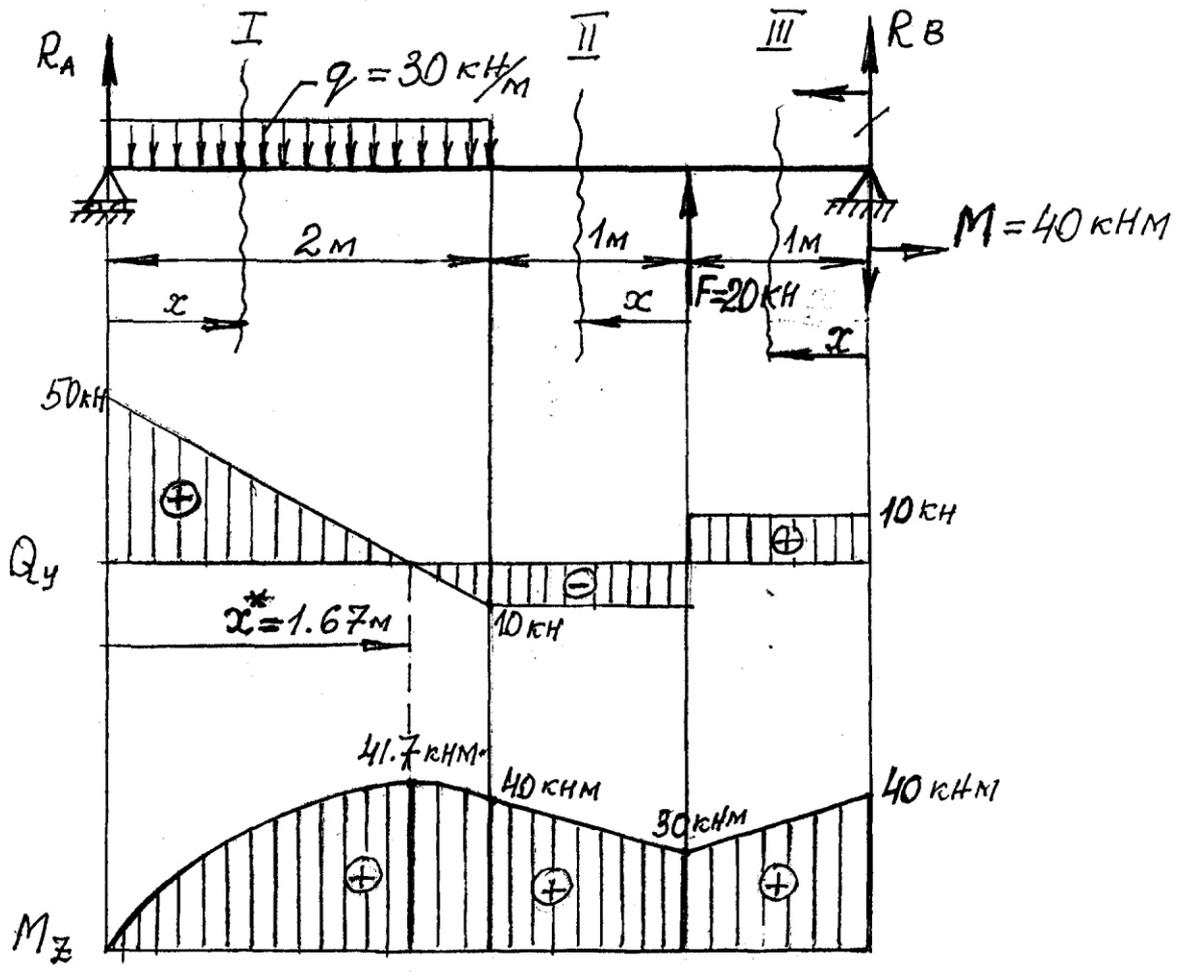


Рис. 5.7

3 участок $0 \leq x \leq 1$ м.

$$Q_y = R_B = 10 \text{ кН};$$

$$M_z(x) = -R_B x + M = -10x + 40;$$

$$x = 0: M_z = 40 \text{ кНм};$$

$$x = 1 \text{ м}: M_z = 30 \text{ кНм}.$$

По эпюрам Q_y и M_z можно определить положение опасных сечений в балках, т.е. сечений, в которых поперечная сила и изгибающий момент достигают наибольших (по модулю) значений.

6. Нормальные напряжения при чистом изгибе

В поперечном сечении балки, работающей на изгиб возникают два внутренних силовых фактора: Q_y – поперечная сила; M_z – изгибающий момент.

Нормальное напряжение в любой точке поперечного сечения балки определяется величиной изгибающего момента в данном сечении балки. Поэтому рассмотрим такой случай изгиба, при котором отсутствует поперечная сила, т.е. случай чистого изгиба (рис. 6.1).

6.1. Опытные данные. Гипотеза плоских сечений.

На боковой поверхности балки покажем сетку линий, параллельных и перпендикулярных продольной оси балки (рис. 6.2). При изгибе продольные линии в нижней части балки будут удлиняться, в верхней – укорачиваться. Переход от растянутых к сжатым волокнам происходит плавно; в средней части балки находится слой, волокна которого только искривляются, но не испытывают ни растяжения, ни сжатия. Такой слой называется *нейтральным слоем*.

Линия пересечения нейтрального слоя с поперечным сечением балки называется *нейтральной линией*. Поперечные сечения, перпендикулярные продольной оси балки до деформаций, остаются плоскими и перпендикулярными изогнутой оси балки после деформации. Эти опытные данные называют гипотезой плоских сечений, которая будет положена в основу последующих выводов. Выяснив характер деформации при чистом изгибе, составим условия равновесия между внешними и внутренними силами (рис. 6.1). Проведем сечение 1–1 на расстоянии x от левой опоры балки (рис. 6.1а) и рассмотрим условия равновесия левой отсеченной части (рис. 6.1б).

$$\sum M_{(z)}: M = M_z.$$

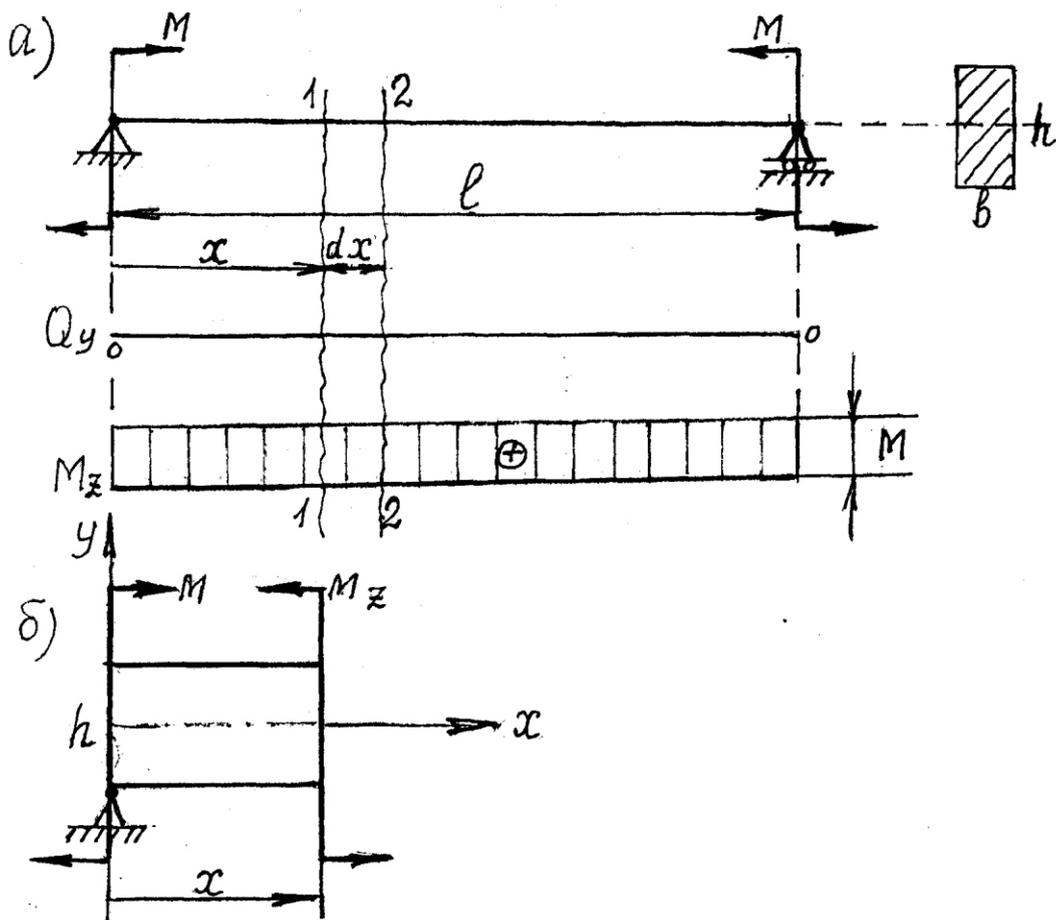


Рис. 6.1

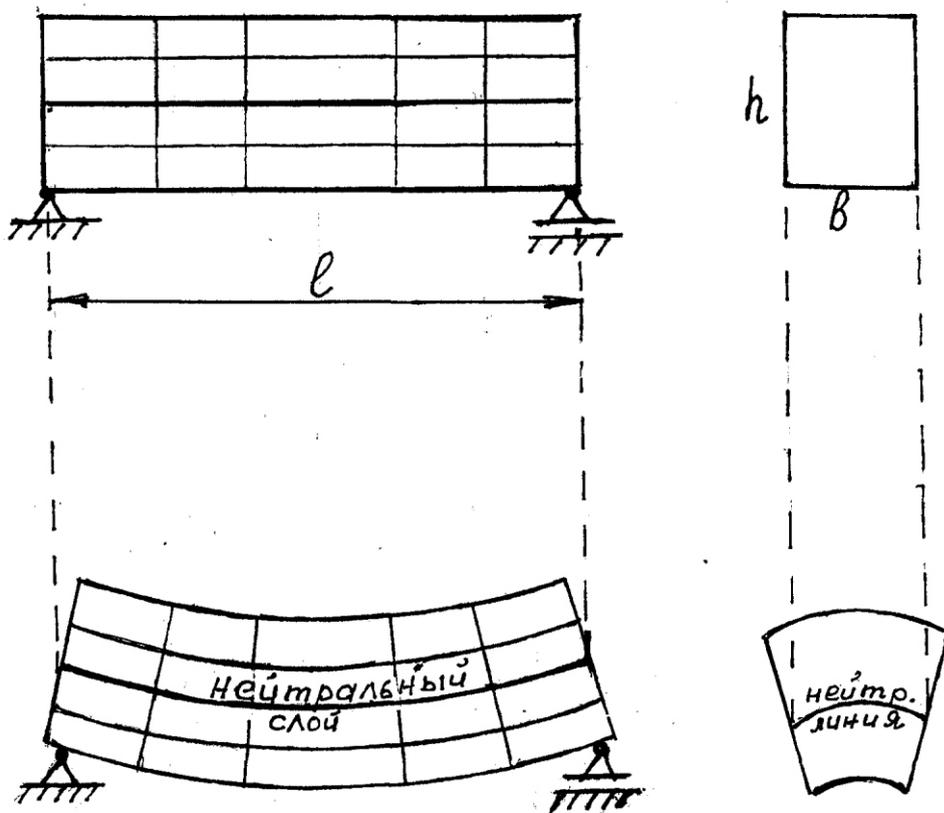


Рис. 6.2

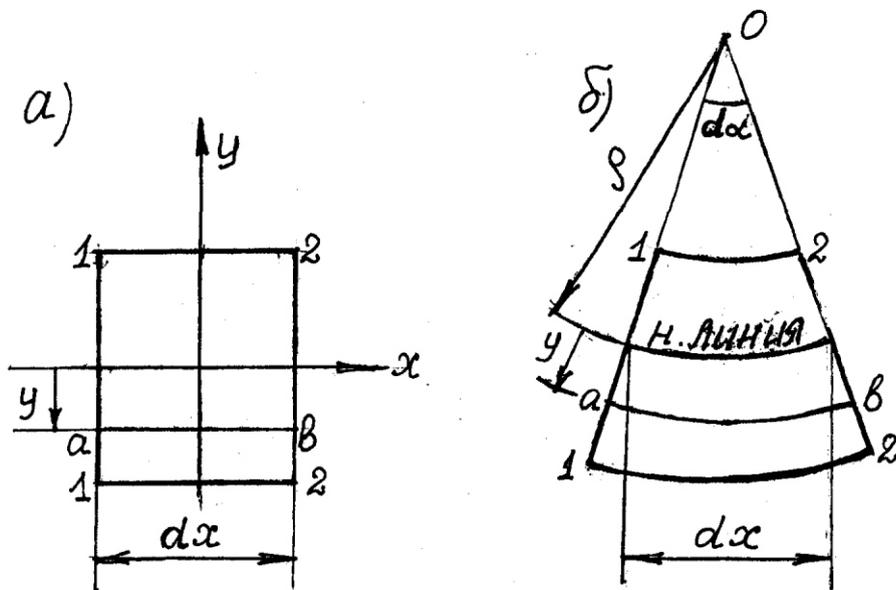


Рис. 6.3

Как видно, этого уравнения недостаточно для определения величины и закона распределения нормальных напряжений, поэтому обратимся к изучению деформации продольных волокон балки на основании полученных экспериментальных данных.

6.2. Деформация продольных волокон балки

В балке (рис. 6.1) двумя сечениями 1–1 и 2–2, перпендикулярными ее оси выделим элемент длиной dx . (рис. 6.3а).

Рассмотрим деформацию продольного волокна ab на расстоянии y от нейтрального слоя в растянутой зоне балки. Поперечные сечения 1–1 и 2–2, оставаясь плоскими, повернутся вокруг своих нейтральных осей и займут новое положение (рис. 6.3б). Точка их пересечения O называется центром кривизны нейтрального слоя. Обозначим расстояние от центра кривизны до нейтрального слоя буквой ρ и назовем его радиусом кривизны нейтрального слоя. Центральный угол между направлениями сечений 1–1 и 2–2 обозначим $d\alpha$. Поскольку длина волокна нейтрального слоя не изменяется и остается равной dx , то

$$\rho \cdot d\alpha = dx.$$

Длина волокна ab до деформации равна dx . Длина этого волокна после деформации балки будет равна $(\rho + y)d\alpha$. Абсолютная деформация этого волокна

$$(\rho + y)d\alpha - dx = (\rho + y)d\alpha - \rho d\alpha = yd\alpha.$$

Относительная деформация этого волокна равна

$$\varepsilon = \frac{yd\alpha}{dx} = \frac{yd\alpha}{\rho d\alpha} = \frac{y}{\rho}; \quad \varepsilon = \frac{y}{\rho}. \quad (6.1)$$

Из полученного выражения следует, что деформация продольных волокон балки пропорциональна расстоянию этих волокон от нейтральной слоя.

Установим закон распределения нормальных напряжений по высоте сечения балки. При деформации чистого изгиба происходит растяжение и сжатие продольных волокон балки. Считая эти деформации полностью упругими, воспользуемся законом Гука для линейного напряженного состояния $\sigma = E\varepsilon$.

Учитывая (6.1) получим

$$\sigma = E \frac{y}{\rho}; \quad (6.2)$$

т.е. нормальное напряжение в некоторой точке сечения балки прямо пропорционально расстоянию этой точки от нейтрального слоя.

6.3. Уравнения равновесия для отсеченной части балки

Рассмотрим условие равновесия отсеченной части балки, показанной на рис. 6.1.

Совместим ось y (рис. 6.4) с линией пересечения вертикальной плоскости симметрии с поперечным сечением балки. Нейтральную линию сечения совместим с осью z ; при этом ее положение по высоте сечения балки пока неизвестно. Ось x является геометрической осью стержня.

В некоторой точке поперечного сечения с координатами y, z выделим элементарную площадку ΔA , через которую передается элементарная сила упругости $\sigma \Delta A$.

Пространственная система сил должна удовлетворять шести уравнениям статики. Три уравнения обращаются в тождества вида $0 \equiv 0$, а именно:

$$\sum y: 0 \equiv 0, \quad \sum z: 0 \equiv 0, \quad \sum M: 0 \equiv 0.$$

Запишем оставшиеся три уравнения равновесия:

$$\sum x: \int_A \sigma dA = 0. \quad (6.3)$$

$$\sum M_y: \int_A \sigma z dA = 0. \quad (6.4)$$

$$\sum M_z: \int_A \sigma y dA - M_z = 0. \quad (6.5)$$

Подставим выражение для нормального напряжения (6.2) в уравнение (6.3); получим:

$$\frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0,$$

т.к. $\frac{E}{\rho} = \text{const} \neq 0$, то

$$\int_A y dA = 0. \quad (6.6)$$

Интеграл вида $\int_A y dA$ представляет собой статический момент S_z площади сечения относительно нейтральной оси z , т.е.

$$S_z = \int_A y dA. \quad (6.7)$$

Статический момент может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Статический момент равен нулю относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения, следовательно согласно полученному выражению (6.6) ось z является центральной осью. Таким образом, нейтральная линия сечения проходит через центр тяжести сечения.

Подставим то же выражение (6.2) в уравнение (6.4)

$$\frac{E}{\rho} \int_A yz dA = 0.$$

Отсюда следует

$$\int_A yz dA = 0. \quad (6.8)$$

Полученный интеграл представляет собой центробежный момент инерции относительно осей y и z .

$$I_{yz} = \int_A yz dA = 0.$$

Он также может быть положительным, отрицательным или обращаться в ноль. В том случае, если он равен нулю, оси y , z являются главными центральными осями инерции, и плоскости, проходящие через главные оси инерции называются главными плоскостями инерции. Таким образом, изгиб будет плоским, если внешние силы приложены в одной из главных плоскостей инерции.

Рассмотрим последнее уравнение (6.5) подставив в него зависимость (6.2).

$$M_z = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA.$$

Интеграл вида $\int_A y^2 dA$ представляет собой осевой момент инерции I_z площади сечения относительно оси z .

$$I_z = \int_A y^2 dA. \quad (6.9)$$

Далее

$$M_z = \frac{E}{\rho} I_z \quad \text{или} \quad \frac{E}{\rho} = \frac{M_z}{I_z},$$

откуда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}. \quad (6.10)$$

В полученном равенстве $\frac{1}{\rho}$ представляет кривизну нейтрального слоя χ , а произведение EI_z называют жесткостью балки при изгибе.

Полученное уравнение

$$\chi = \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (6.11)$$

называется *уравнением Бернулли – Эйлера*.

Как видно, кривизна нейтрального слоя балки прямо пропорциональна изгибающему моменту и обратно пропорциональна жесткости поперечного сечения балки.

Умножим обе части уравнения (6.10) на y :

$$\frac{1}{\rho} y = \frac{M_z}{EI_z} y, \quad \text{или} \quad \frac{E}{\rho} y = \frac{M_z}{I_z} y.$$

Согласно зависимости (6.2) левая часть этого равенства представляет собой нормальное напряжение σ . Отсюда имеем:

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y.$$

В практических расчетах знак полученного напряжения устанавливают по характеру деформации продольных волокон (растяжение или сжатие рис. 6.5).

При этом формула для нормальных напряжений записывается в виде:

$$|\sigma| = \frac{|M_z|}{I_z} |y|. \quad (6.12)$$

Проанализируем полученную формулу. Нормальные напряжения в точке пропорциональны расстоянию y до этой точки. Причем, при $y=0$, $\sigma=0$, а в наиболее удаленных от нейтральной линии точках нормальные напряжения достигают наибольшего значения.

$$|\sigma_{max}| = \frac{|M_{z max}|}{I_z} |y_{max}|. \quad (6.13)$$

Эпюра распределения нормальных напряжений по высоте сечения балки показана на рис. 6.6.

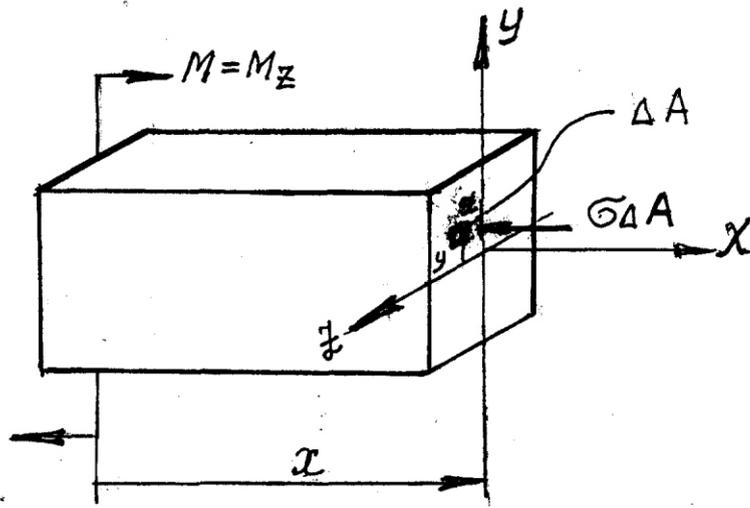


Рис. 6.4

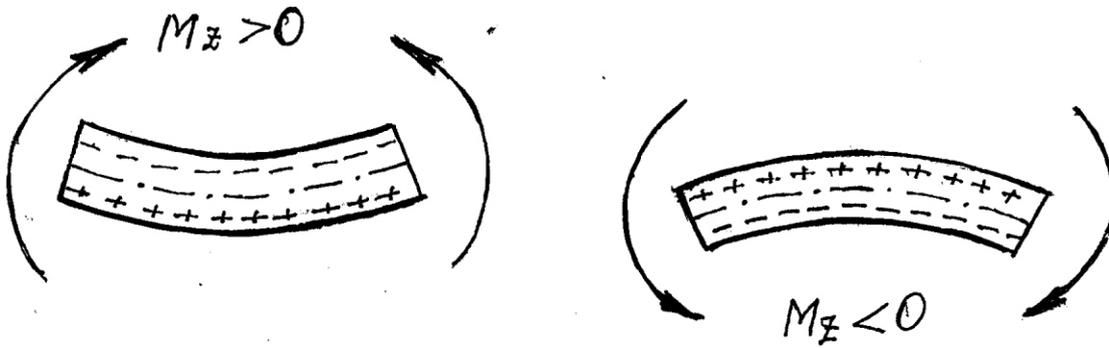


Рис. 6.5

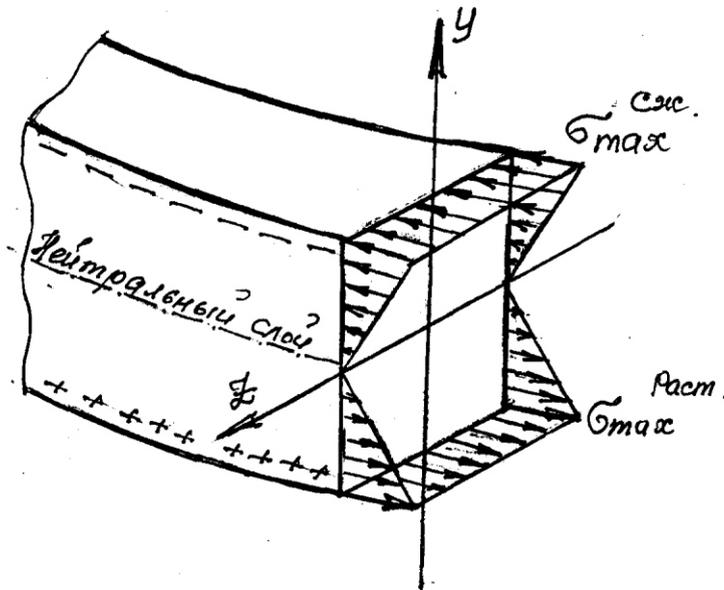


Рис. 6.6

Прочность балки обеспечена, если максимальное напряжение не превышает значения допускаемого напряжения.

$$|\sigma_{max}| \leq [\sigma],$$

где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение для материала балки.

Введем обозначение

$$W_z = \frac{I_z}{|y_{max}|}, \quad (6.14)$$

где W_z называется осевым моментом сопротивления. Осевой момент инерции I_z осевой момент сопротивления W_z являются геометрическими характеристиками поперечного сечения и зависят от его размеров и формы.

Таким образом, условие прочности при изгибе принимает вид

$$|\sigma_{max}| = \frac{|M_z \max|}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (6.15)$$

Для материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, условия прочности записываются в виде

$$|\sigma_{max}^{раст}| = \frac{|M_z \max|}{I_z} |y_{max}^{раст}| \leq [\sigma]_{раст}$$

и

$$|\sigma_{max}^{сж}| = \frac{|M_z \max|}{I_z} |y_{max}^{сж}| \leq [\sigma]_{сж},$$

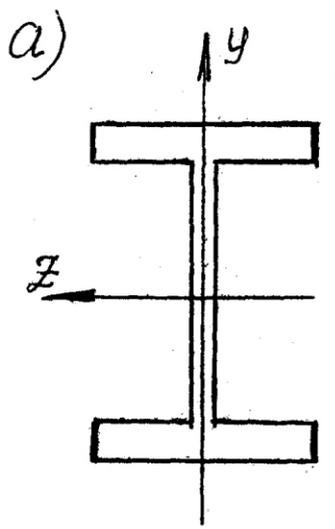
где $[\sigma]_{раст}$ и $[\sigma]_{сж}$ соответственно допускаемые напряжения материала на растяжение и сжатие.

6.5. Рациональные формы сечений балок

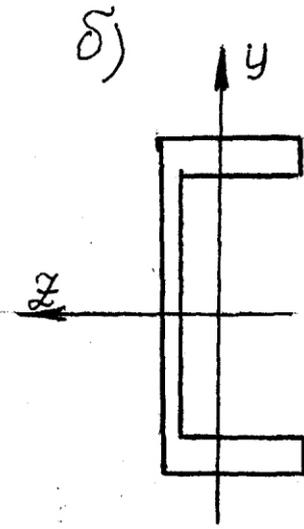
Согласно (6.14) наибольшего значения нормальные напряжения достигают вблизи крайних верхних и нижних волокон, а на нейтральной оси они равны нулю. Поскольку вблизи нейтрального слоя нормальные напряжения достигают небольшой величины (рис. 6.6), то несущая способность материала в этой области не используется полностью. Поэтому сплошные сечения балок (круг, прямоугольник) являются неэкономичными.

Следовательно, при проектировании сечения нужно по возможности удалить бо́льшую часть материала от нейтральной линии. Если бы весь материал балки был отнесен к верхней и нижней граням балки высоты h , то теоретически это был бы наиболее выгодный случай. Практически верхняя и нижняя части сечения должны быть соединены между собой стенкой. Таким образом, мы приходим к двутавровому сечению и подобным ему тонкостенным профилям балок (рис. 6.7). Эти сечения являются наиболее рациональными с точки зрения экономии материала.

Геометрические характеристики балок прокатного профиля (двутавр, швеллер, уголок) приведены в справочных таблицах, называемых сортаментом, (см. табл. 6.2).



двутавр



швеллер

Рис. 6.7

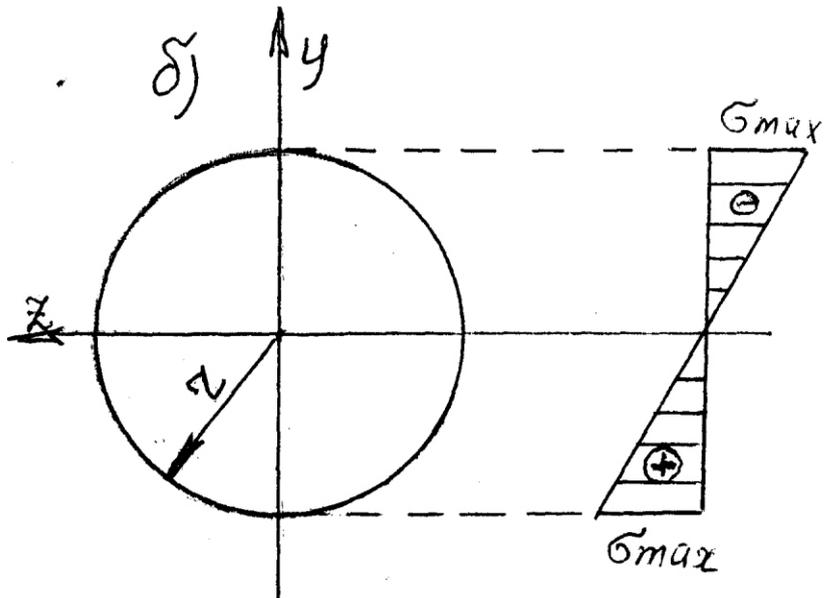
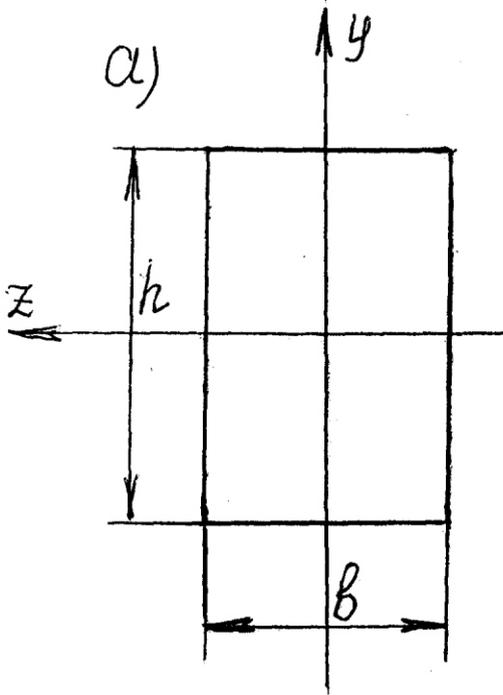


Рис. 6.8

Таблица 6.1. Геометрические характеристики сечений

Вид сечения	Формулы для вычисления геометрических характеристик			
	I_z	I_y	W_z	W_y
прямоугольник	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{b^3h}{12}$	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{b^2h}{6}$
круг	$\frac{\pi r^4}{4}$	$\frac{\pi r^4}{4}$	$\frac{\pi r^3}{4}$	$\frac{\pi r^3}{4}$

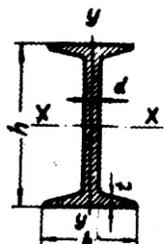


Таблица 6.2. Сортамент двутаврового сечения

№ профиля	Вес 1 пог.м, кг	Размеры, мм				Площадь сечения, см ²	Справочные величины для осей						
		h	b	d	t		x-x				y-y		
							I_x	W_x	i_x	S_x	I_y	W_y	i_y
							см ⁴	см ³	см	см ³	см ⁴	см ³	см
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	19,9	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	21,0	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	22,7	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	24,0	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	25,8	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	29,4	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	31,5	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	33,9	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	39,2	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	56,1	400	155	8,0	13,0	71,4	18930	947	16,3	540	666	85,9	3,05
45	65,2	450	160	8,6	14,2	83,0	27450	1220	18,2	699	807	101	3,12
50	76,8	500	170	9,5	15,2	97,8	39290	1570	20,0	905	1040	122	3,26
55	89,8	550	180	10,3	16,5	114	55150	2000	22,0	1150	1350	150	3,44
60	104	600	190	11,1	17,8	132	75450	2510	23,9	1450	1720	181	3,60
65	120	650	200	12,0	19,2	153	101400	3120	25,8	1800	2170	217	3,77
70	138	700	210	13,0	20,8	176	134600	3840	27,7	2230	2730	260	3,94
70a	158	700	210	15,0	24,0	202	152700	4360	27,5	2550	3240	309	4,01
70б	184	700	210	17,5	28,2	234	175370	5010	27,4	2940	3910	373	4,09

6.6. Подбор сечения балок

Подбор прямоугольного сечения

Для балки (рис. 5.5) подберем прямоугольное сечение (рис. 6.8а) с соотношением сторон $h : b = 3$. Материал балки имеет допускаемое напряжение $[\sigma] = 10 \text{ МПа} = 10 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2$.

Максимальное значение изгибающего момента 40 кНм .

Из условия прочности (6.15)

$$W_z \geq \frac{|M_z \text{ max}|}{[\sigma]};$$

$$W_z = \frac{bh^2}{6} \text{ (см. табл. 6.1);}$$

при заданном отношении сторон $h : b = 3$, $h = 3b$

$$W_z = \frac{b(3b)^2}{6} = \frac{3b^3}{2},$$

или

$$\frac{3}{2}b^3 \geq \frac{|M_z \text{ max}|}{[\sigma]};$$

Определим ширину балки

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{2|M_z \text{ max}|}{3[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 40}{3 \cdot 10 \cdot 10^3}} = 0,139 \text{ м};$$

и высоту балки $h = 3b = 0,417 \text{ м}$.

Примем размеры сечения балки

$$b = 0,14 \text{ м}; h = 0,42 \text{ м}.$$

Проведем проверочный расчет подобранных размеров сечения балки.

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{0,14 \cdot 0,42^2}{6} = 0,0041 \text{ м}^3;$$

$$|\sigma_{max}| = \frac{|M_z \max|}{W_z} = \frac{40}{0,0041} = 9,8 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2;$$

$$|\sigma_{max}| = 9,8 \cdot \text{МПа} < [\sigma] = 10 \text{ МПа}.$$

Подбор круглого сечения

Для этой же балки подберем круглое сечение.

$$W_z = \frac{\pi r^3}{4} \text{ (см. табл. 6.1)}$$

$$\frac{\pi r^3}{4} \geq \frac{|M_z \max|}{[\sigma]};$$

$$r \geq \sqrt[3]{\frac{4|M_z \max|}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 40}{3,14 \cdot 10 \cdot 10^3}} = 0,172 \text{ м}.$$

Принимаем $r = 0,17 \text{ м}$.

Проведем проверочный расчет

$$W_z = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,17^3}{4} = 0,0039 \text{ м}^3.$$

$$|\sigma_{max}| = \frac{|M_z \max|}{W_z} = \frac{40}{0,0039} = 10,3 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2.$$

Вычислим процент перенапряжения подобранного сечения балки

$$\frac{|\sigma_{max}| - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{10,3 - 10}{10} \cdot 100\% = 2,9\%,$$

что меньше допускаемого процента перенапряжения сечения, равного 5%.

Подбор двутаврового сечения

Для балки (рис. 5.7) подберем двутавровое сечение (см. табл. 6.2). Материал балки имеет допускаемое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа} = 160 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2$.

Максимальное значение изгибающего момента $41,7 \text{ кНм}$.

Из условия прочности (6.15) определим момент сопротивления:

$$W_z \geq \frac{|M_z \max|}{[\sigma]} = \frac{41,7}{160 \cdot 10^3} = 0,26 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Переведем полученное значение момента сопротивления в см^3 .

$$W_z = 0,26 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 0,26 \cdot 10^3 \text{ см}^3 = 260 \text{ см}^3.$$

По сортаменту (табл. 6.2) принимаем ближайшее значение момента сопротивления (столбец W_x) равное 254 см^3 , что соответствует номеру двутавра 22^а. Определим расчетное напряжение

$$\sigma = \frac{|M_z \max|}{W_z} = \frac{41,7}{0,254 \cdot 10^{-3}} = 164 \cdot 10^{-3} \text{ кН/м}^2 = 164 \text{ МПа}.$$

Вычислим процент перенапряжения

$$\frac{164 - 160}{160} \cdot 100\% = 2,5\% ,$$

что меньше, чем допускаемый процент перенапряжения, который принимается равным 5%.

Замечание. В расчетном задании № 1 выполняется расчет двух балок на прочность: консольной с подбором прямоугольного и круглого сечений, двухопорной балки с подбором двутаврового сечения.

7. Сложное сопротивление

7.1. Общие понятия

Сложным сопротивлением называют совокупность простейших деформаций, возникающих в теле в результате действия пространственной системы сил. Напряжения и деформации при сложном сопротивлении определяются на основе принципа независимости действия сил. А именно: результат одновременного действия нескольких сил равен сумме (алгебраической или геометрической) результатов действия каждой силы в отдельности. Этот принцип справедлив для малых деформаций в пределах действия закона Гука.

7.2. Внутренние силовые факторы в сечении стержня, находящегося под действием пространственной системы сил

Рассмотрим стержень, на который действует произвольная пространственная система сил. В этом случае в поперечном сечении возникают шесть внутренних силовых факторов: N , Q_y , Q_z , M_y , M_z , M_x (рис. 7.1), величина которых

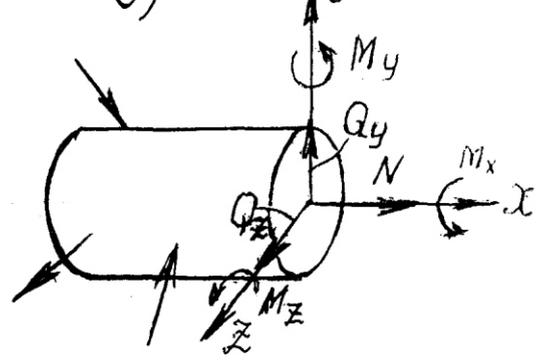
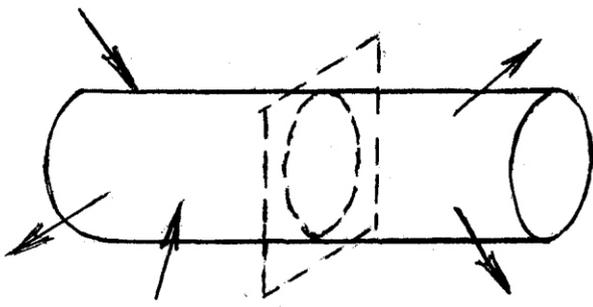


Рис. 7.1

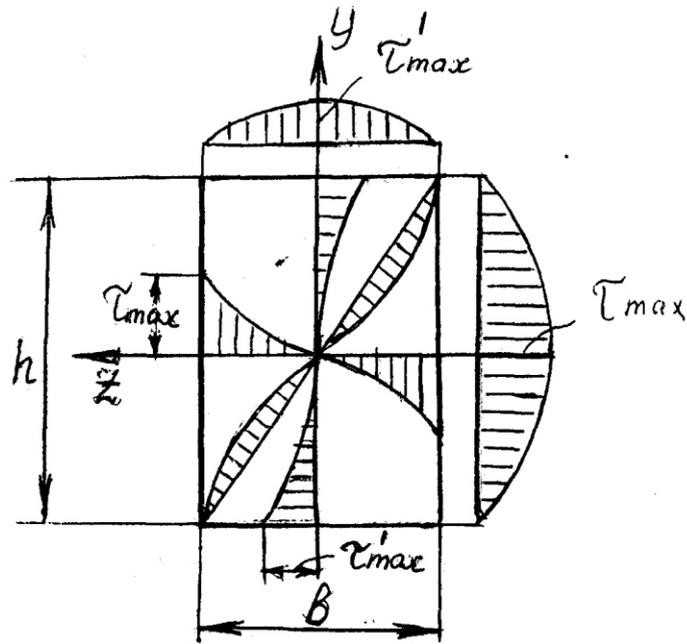


Рис. 7.2

определяется с помощью метода сечений. Продольная сила N и изгибающие моменты M_y и M_z определяют величину нормального напряжения в некоторой точке поперечного сечения стержня. Поперечные силы Q_y , Q_z и крутящий момент M_x определяют величину касательного напряжения в точке поперечного сечения стержня.

Правило знаков

Момент принято считать положительным, если с конца соответствующей оси он виден действующим против движения часовой стрелки. (рис. 7.1б).

7.3. Определение касательных напряжений

а) стержень круглого поперечного сечения

В стержнях круглого поперечного сечения касательные напряжения, отвечающие крутящему моменту M_x , вычисляются по формуле

$$\tau = \frac{M_x}{I_p} \cdot \rho,$$

где $I_p = \int_A \rho^2 dA$ – полярный момент инерции сечения. Наибольшего значения эти напряжения достигают в точках сечения у поверхности стержня и равны

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_p},$$

где $W_p = \frac{I_p}{\rho_{max}}$ – полярный момент сопротивления сечения. Напомним, что полярный момент инерции и полярный момент сопротивления сечения вычисляются соответственно по формулам $I_p = \frac{\pi r^4}{2}$ и $W_p = \frac{\pi r^3}{2}$.

б) стержень прямоугольного поперечного сечения

В стержнях прямоугольного поперечного сечения касательные напряжения достигают наибольших значений на серединах сторон контура сечения (рис. 7.2) и равны нулю в угловых точках контура. Наибольшее касательное напряжение возникает в середине длинной стороны и равно $\tau_{max} = \frac{M_x}{W_k}$; в середине меньшей стороны $\tau'_{max} = \gamma \tau_{max}$, где $\gamma \leq 1$. Момент сопротивления W_k в этом случае определяется по формуле

$$W_k = \beta \cdot b^3,$$

где b – размер наименьшей стороны прямоугольника. Коэффициенты β и γ зависят от отношения сторон. В таблице 1 приведены их значения.

Таблица 7.1.

Коэффициенты	Отношение сторон h/b									
	1	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	6,0	8,0	10,0
β	0,208	0,346	0,493	0,645	0,801	1,128	1,455	1,789	2,456	3,123
γ	1,000	0,859	0,795	0,766	0,753	0,745	0,744	0,743	0,742	0,742

7.4. Определение нормальных напряжений

Выше уже отмечалось, что продольная сила N и изгибающие моменты M_y и M_z определяют величины нормальных напряжений в сечении. В точке, расположенной в первой четверти с координатами y и z (рис. 7.3), положительная нормальная сила N вызывает растяжение (как и во всех точках сечения), и соответствующее ей нормальное напряжение равно $\sigma^I = \frac{N}{A}$. Положительному изгибающему моменту M_y в этой точке отвечает растягивающее напряжение

$$\sigma^{II} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z, \text{ а положительному } M_z \text{ – сжимающее напряжение } \sigma^{III} = -\frac{M_z}{I_z} \cdot y.$$

Суммарное напряжение в точке, в силу принципа независимости действия сил, может быть найдено путем алгебраического суммирования составляющих нормального напряжения от каждого силового фактора

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} - \frac{M_z \cdot y}{I_z}. \quad (7.1)$$

При определении напряжений в точках поперечного сечения в формуле необходимо учитывать как знаки координат точек, так и знаки силовых факторов согласно принятому выше правилу. Формула (7.1) показывает, что нормальные напряжения в сечении меняются по линейному закону.

Как и в случае плоского изгиба линия в поперечном сечении, на которой нормальные напряжения равны нулю, называется нейтральной. Уравнение нейтральной линии можно получить на основании формулы (7.1) приравняв выражение для нормального напряжения нулю.

$$\frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot z_0}{I_y} - \frac{M_z \cdot y_0}{I_z} = 0. \quad (7.2)$$

Выражение (7.2) представляет собой уравнение прямой, при $N \neq 0$ не проходящей через начало координат. Приравнивая поочередно z_0 и y_0 нулю, найдем отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях координат.

$$a_y = \frac{N \cdot I_z}{A \cdot M_z} \text{ и } a_z = -\frac{N \cdot I_y}{A \cdot M_y}. \quad (7.3)$$

Положение вектора результирующего изгибающего момента определяется геометрическим суммированием векторов изгибающих моментов \bar{M}_y и \bar{M}_z . (рис. 7.4). След плоскости АВ действия результирующего момента M_u (т.е. линия пересечения плоскости действия M_u с плоскостью поперечного сечения) перпендикулярен вектору M_u . Результирующий изгибающий момент равен

$$M_u = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}, \quad (7.4)$$

а угол φ между направлением результирующего момента M_u и горизонтальной осью z равен

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{M_y}{M_z}. \quad (7.5)$$

Угол наклона нейтральной линии к оси z не зависит от составляющей $\frac{N}{A}$ в выражении (7.2), и поэтому, переписав это выражение в виде $\frac{M_y \cdot z_0}{I_y} - \frac{M_z \cdot y_0}{I_z} = 0$, найдем этот угол

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{y_0}{z_0} \right| = \frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y} = \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{I_z}{I_y}. \quad (7.6)$$

Из выражения (7.6) видно, что в общем случае $\alpha \neq \varphi$, т.е. нейтральная линия не перпендикулярна к следу плоскости действия результирующего изгибающего момента (т.е. не параллельна вектору M_u). Условия равенства углов будут следующие:

$$1) M_y = 0, \text{ т.е. } \varphi = 0; \quad 2) M_z = 0, \text{ т.е. } \varphi = \pi/2; \quad 3) I_y = I_z.$$

Первые два условия отвечают случаям плоского изгиба, относительно главных центральных осей y и z , а последнее условие отвечает случаю, когда все центральные оси сечения являются главными. (т.е. для сечений вида круг, квадрат).

Наибольших значений нормальные напряжения достигают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси (точках A и B) (рис. 7.4). Подставляя в формулу (7.1) координаты точек A и B , соответственно найдем

$$\sigma_A = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z_A - \frac{M_z}{I_z} \cdot (-y_A) \quad \text{и} \quad \sigma_B = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot (-z_B) - \frac{M_z}{I_z} \cdot y_B.$$

Эпюра распределения нормальных напряжений по плоскости сечения показана на рис. 7.4. Если материал стержня одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, т.е. имеет одинаковые допускаемые напряжения на растяжение и сжатие, то условие прочности в этом случае запишется в виде

$$\sigma_{max} = \sigma_A = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z_A + \frac{M_z}{I_z} \cdot y_A \leq [\sigma]. \quad (7.7)$$

Если же допускаемые напряжения на растяжение и сжатие для материала различны, то прочность стержня должна быть проверена как по точке A , так и по точке B .

7.5. Совместное действие растяжение (сжатия), изгиба и кручения в стержнях прямоугольного поперечного сечения

Рассмотрим стержень прямоугольного поперечного сечения со сторонами b и h (рис. 7.5). Все внутренние силовые факторы в этом сечении показаны положительными. Нормальные напряжения в точках сечения определяются по формуле (7.1). В частном случае, для угловых точек, имеющих координаты y_{max} и z_{max} , формула (7.1) принимает вид

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot z_{max}}{I_y} - \frac{M_z \cdot y_{max}}{I_z}. \quad (7.8)$$

При решении практических задач по определению напряжений формулу (7.8) удобнее представить в виде

$$\sigma = \frac{|N|}{A} \pm \frac{|M_y|}{I_y} \cdot |z_{max}| \pm \frac{|M_z|}{I_z} \cdot |y_{max}|,$$

или учитывая, что $\frac{I_z}{|y_{max}|} = W_z$, $\frac{I_y}{|z_{max}|} = W_y$, получаем

$$\sigma = \frac{|N|}{A} \pm \frac{|M_y|}{W_y} \pm \frac{|M_z|}{W_z}. \quad (7.9)$$

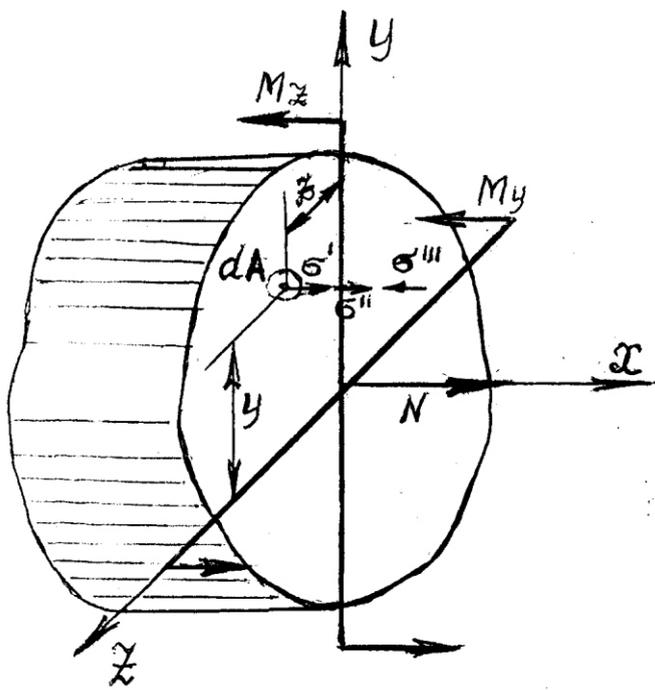


Рис. 7.3

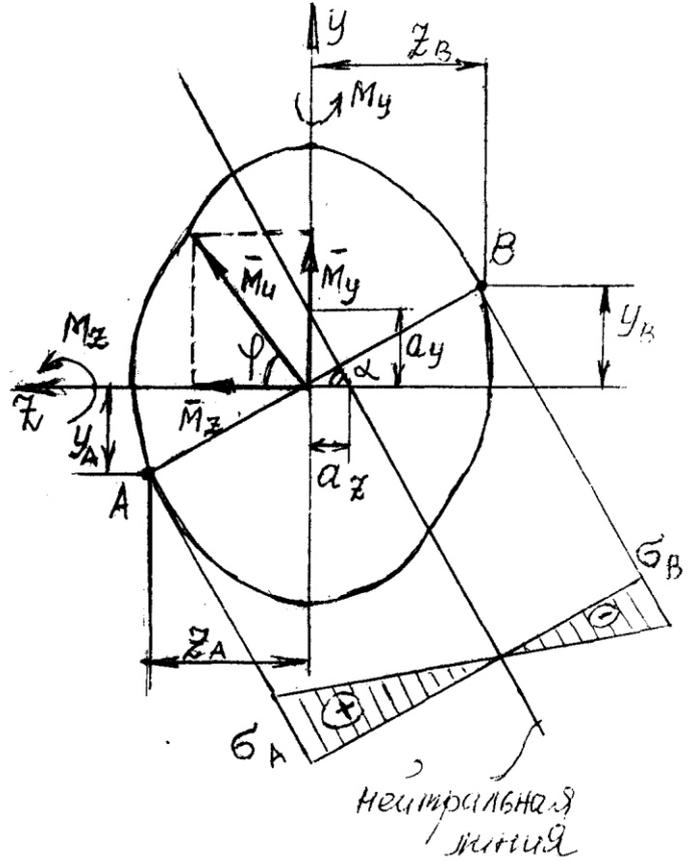


Рис. 7.4

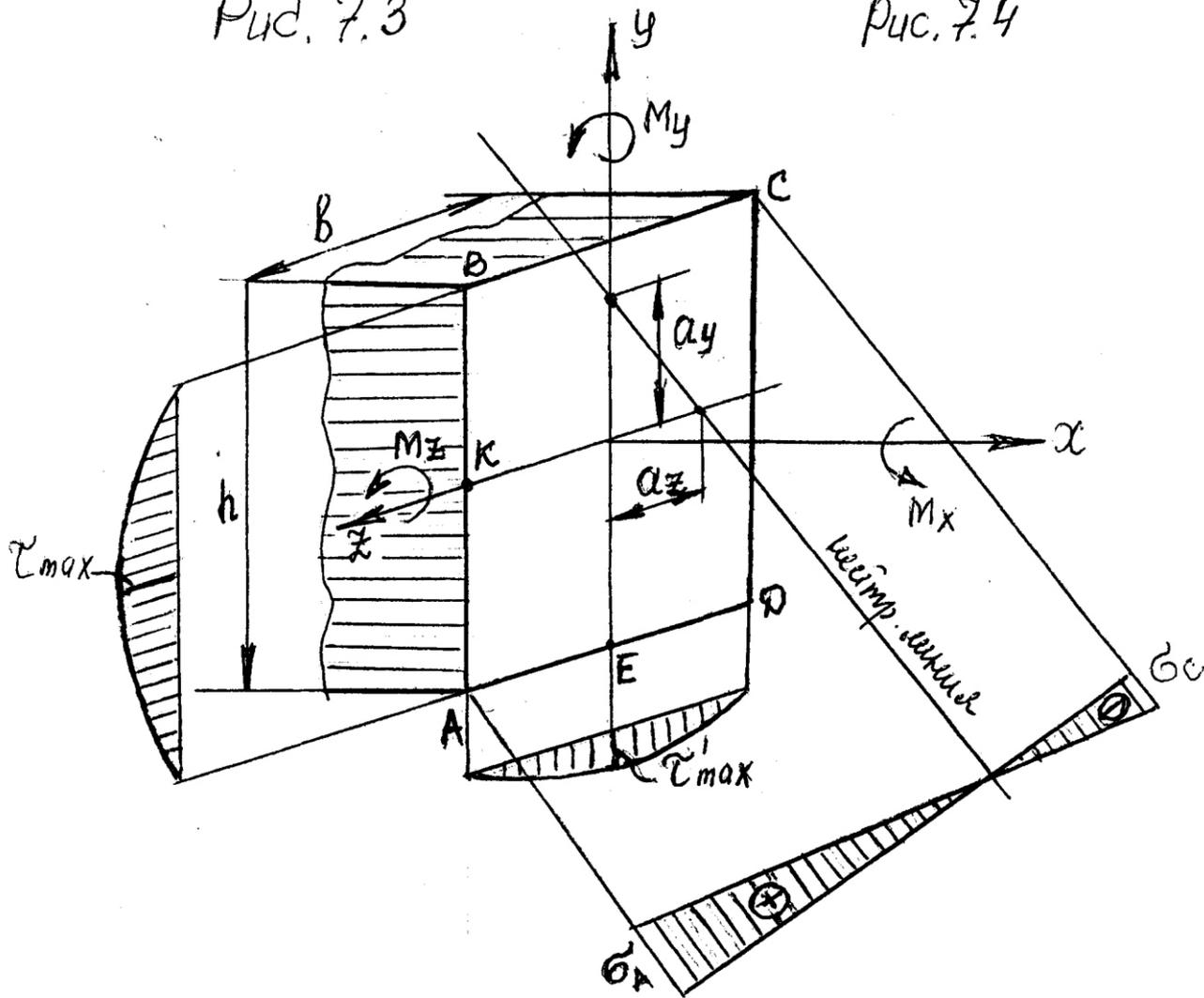


Рис. 7.5

Значения силовых факторов N , M_y и M_z в эту формулу подставляются по их абсолютному значению, а знак каждого слагаемого устанавливается в зависимости от того, растяжение или сжатие вызывает соответствующий силовой фактор в исследуемой точке. Положение нейтральной линии определяется отрезками a_y и a_z (формула 7.3).

В угловых точках A и C сечения, как наиболее удаленных от нейтральной оси, возникают (рис. 7.5) наибольшее растягивающее напряжение (в точке A)

$$\sigma_A = \frac{|N|}{A} + \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z}$$

и наибольшее сжимающее напряжение (в точке C)

$$\sigma_C = \frac{|N|}{A} - \frac{|M_y|}{W_y} - \frac{|M_z|}{W_z}$$

Условие прочности для этих точек будет иметь вид:

$$\sigma_{\max}^{\text{раст}} = \sigma_A = \frac{|N|}{A} + \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma]_{\text{раст}} \quad (7.10)$$

$$\sigma_{\max}^{\text{сж}} = \sigma_C = \frac{|N|}{A} - \frac{|M_y|}{W_y} - \frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma]_{\text{сж}}$$

Если материал стержня имеет одинаковое допускаемое напряжение на растяжение и сжатие, то условие прочности для него должно быть записано только по точке с наибольшим напряжением (по точке A). Расчетная формула для проверки прочности стержня с учетом касательных напряжений в опасных точках E и K (лежащих в серединах сторон прямоугольного сечения) имеет вид

$$\sigma_{\text{расч}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad (7.11)$$

$$\sigma_K = \frac{|N|}{A} + \frac{|M_y|}{W_y}; \quad \tau_K = \frac{|M_x|}{\beta b^3}, \quad (\text{см. параграф 7.2})$$

$$\sigma_E = \frac{|N|}{A} + \frac{|M_z|}{W_z}; \quad \tau_E = \gamma \tau_K$$

Прочность стержня будет обеспечена, если условие прочности выполняется для трех опасных точек (A , K , E).

Определение положения нейтральной линии сечения и построение эпюр нормальных и касательных напряжений рассмотрено в параграфе 7.2.

7.6. Совместное действие растяжения (сжатия), изгиба и кручения в стержнях круглого поперечного сечения

Для круглого сечения, все центральные оси которого являются главными, плоскость действия суммарного изгибающего момента M_u , равно

$$M_u = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

является плоскостью изгиба. Из формулы (7.6), определяющей связь между углами наклона нейтральной линии и суммарного изгибающего момента к соответствующим осям, видно, что при равенстве осевых моментов инерции эти углы равны между собой $\alpha = \varphi$. Это значит, что след плоскости суммарного изгибающего момента M_u и нейтральная линия взаимно перпендикулярны. Таким образом, точка A (рис. 7.6), лежащая на пересечении следа плоскости момента M_u с контуром сечения, является наиболее удаленной от нейтральной линии, и, следовательно, в ней возникает наибольшее нормальное напряжение

$$\sigma_A = \frac{N}{A} + \frac{M_u}{W_u}, \quad (7.12)$$

площадь поперечного сечения $A = \pi r^2$, осевые моменты сопротивления

$$W_u = W_y = W_z = \frac{\pi r^3}{4}.$$

$$\text{Отсюда } \sigma_A = \frac{N}{\pi r^2} + \frac{4M_u}{\pi r^3}. \quad (7.13)$$

В точке B возникает наибольшее сжимающее напряжение, определяемое по формуле

$$\sigma_B = \frac{N}{A} - \frac{M_u}{W_u} = \frac{N}{\pi r^2} - \frac{4M_u}{\pi r^3}. \quad (7.14)$$

Как известно, при кручении круглых стержней (Учебник 1) касательные напряжения по диаметру сечения меняются по линейному закону и достигают наибольших значений в точках, лежащих на контуре сечения. Это означает, что точка A является опасной как по нормальным, так и по касательным напряжениям. Наибольшее касательное напряжение в этой точке равно

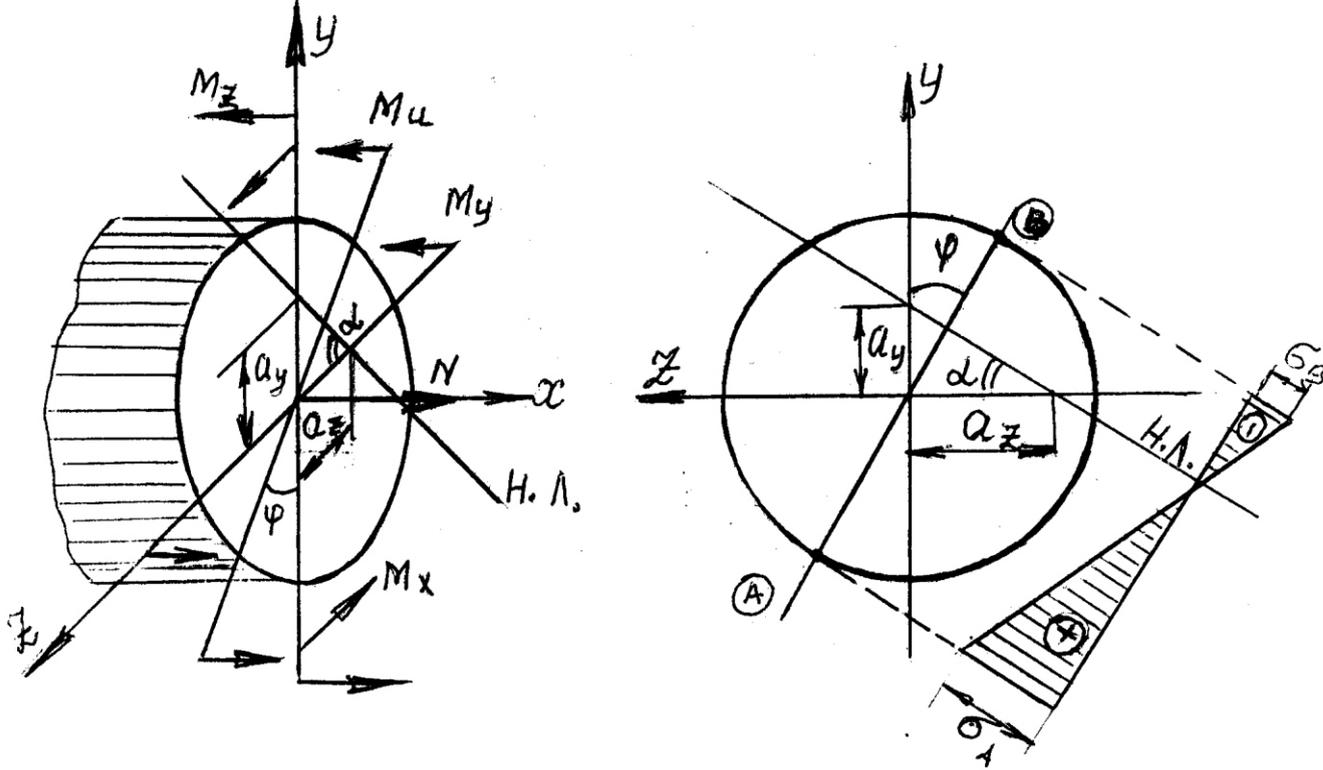


Рис. 7.6

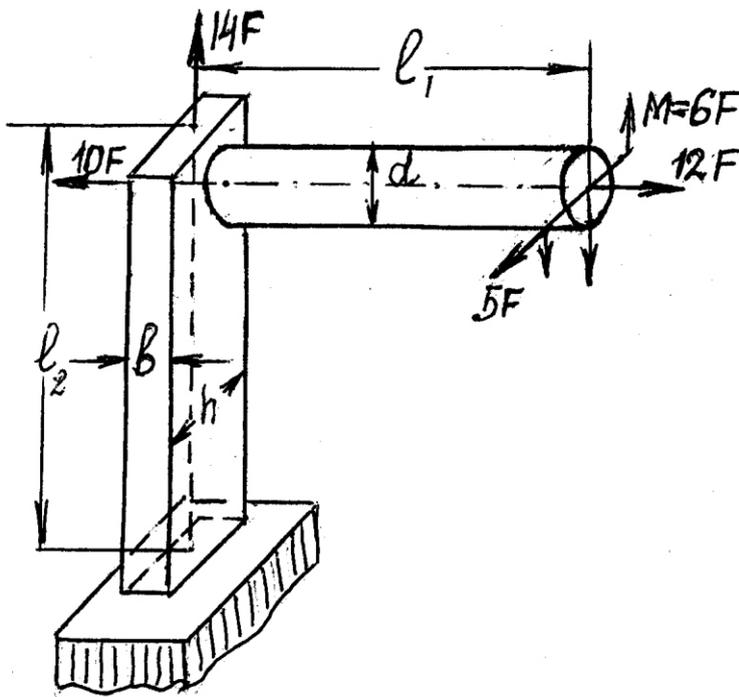


Рис. 7.7

$$\tau_A = \frac{M_x}{W_p} = \frac{2M_x}{\pi r^3}.$$

Условие прочности стержня, согласно (7.11) имеет вид

$$\sigma_{расч} A = \sqrt{\left(\frac{N}{\pi r^2} + \frac{4M_y}{\pi r^3}\right)^2 + 4\left(\frac{2M_x}{\pi r^3}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (7.15)$$

Отсекаемые нейтральной линией отрезки на координатных осях определяются как и в общем случае по формулам (7.3), угол наклона φ суммарного изгибающего момента к оси y – по формуле (7.5), а угол наклона α нейтральной линии к оси z – по формуле (7.6). Эпюра распределения нормальных напряжений по сечению показана на рис. 7.6.

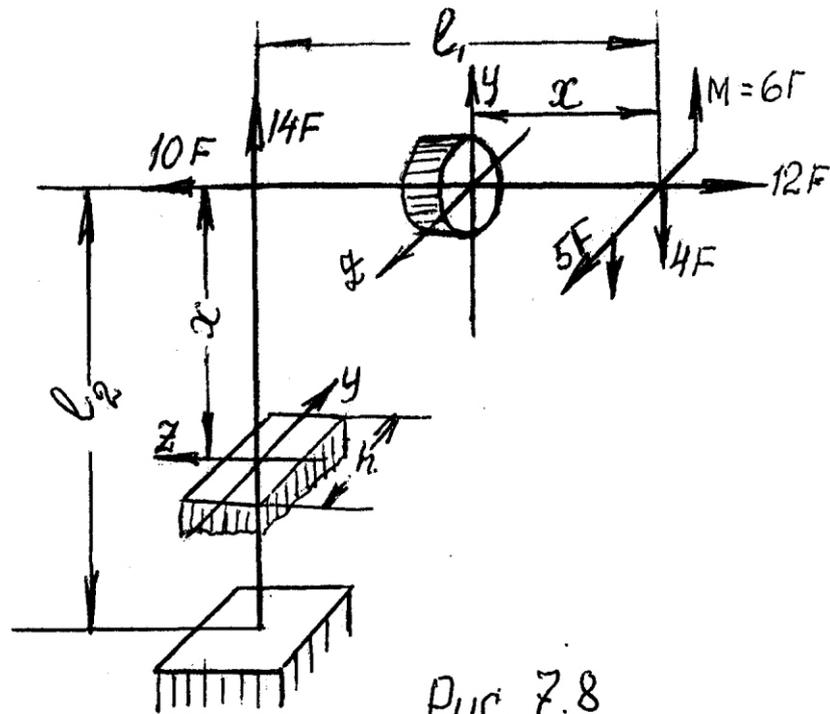


Рис. 7.8

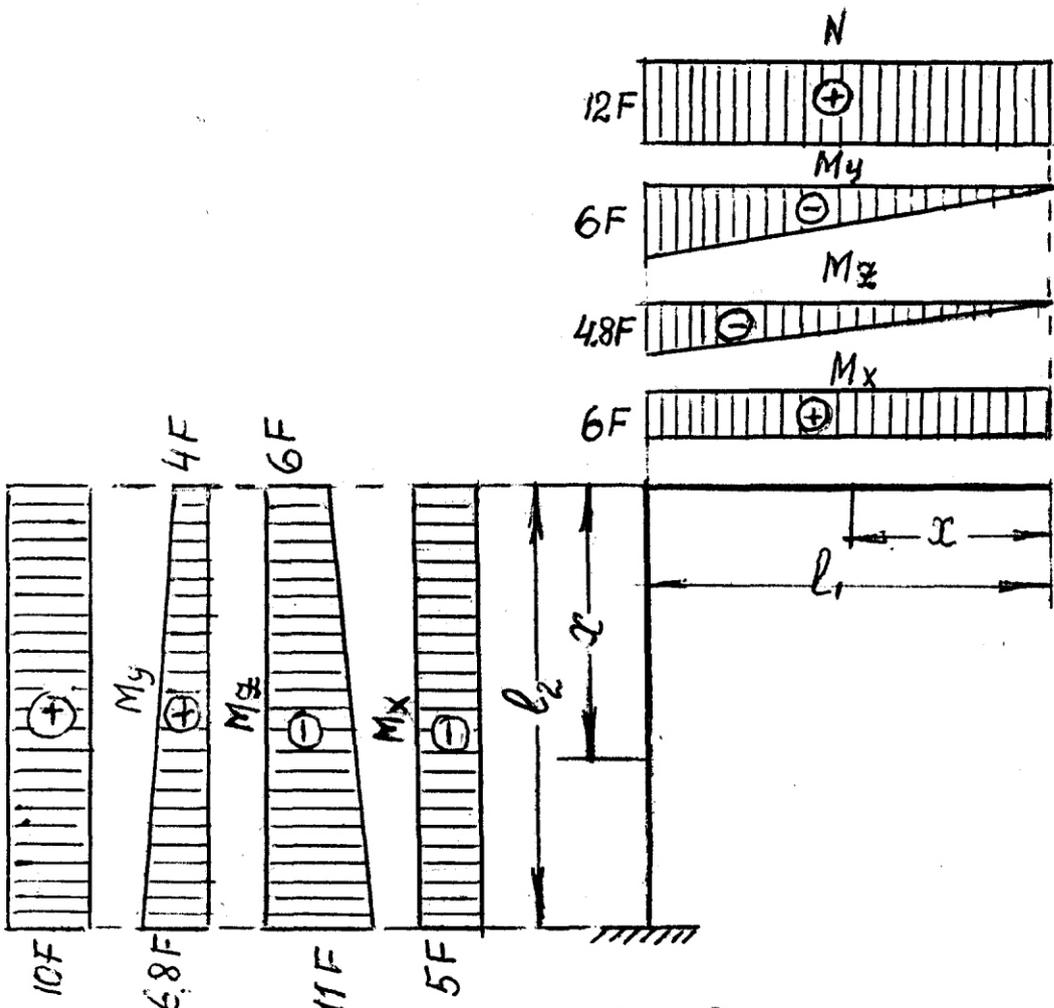


Рис. 7.9

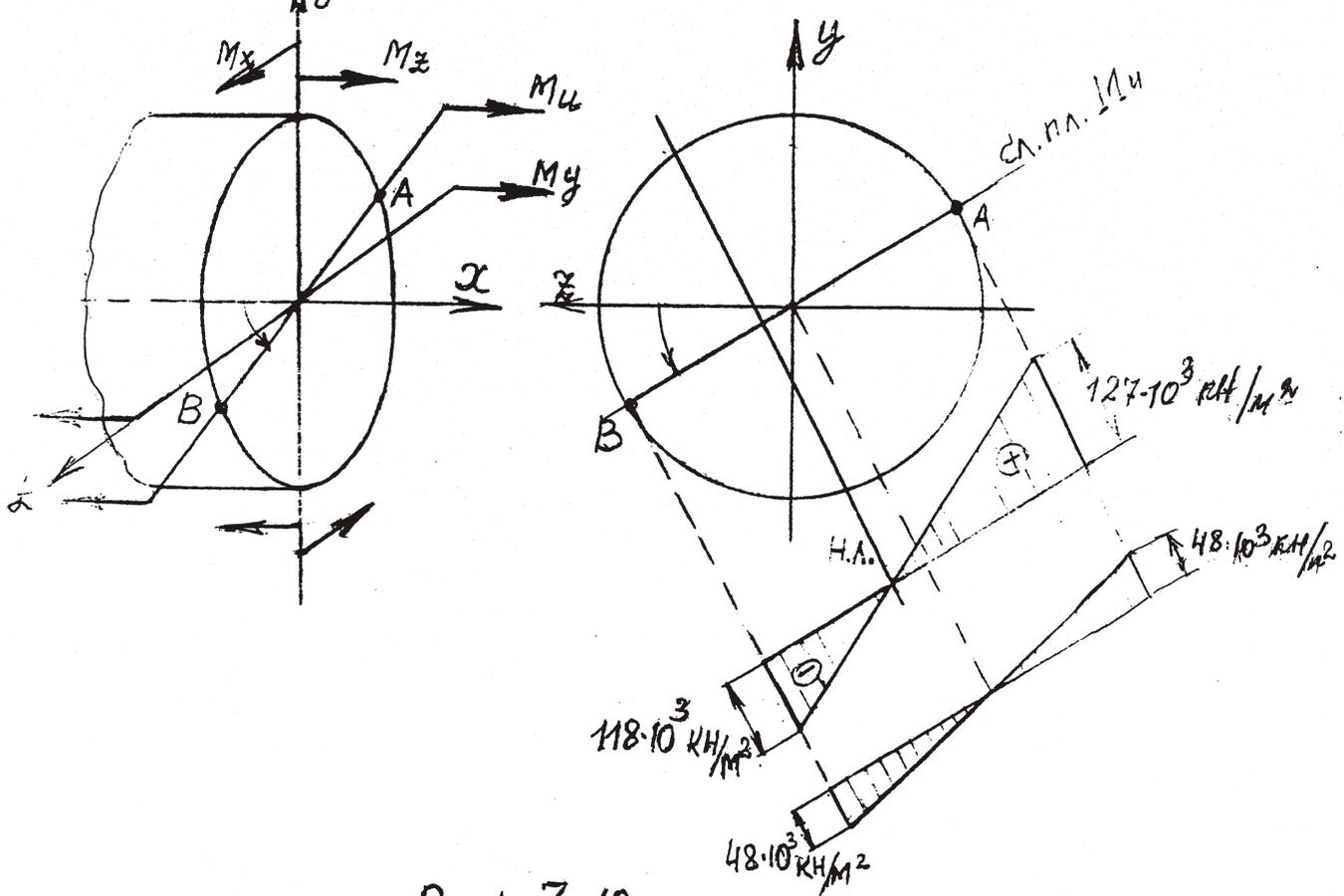


Рис. 7.10

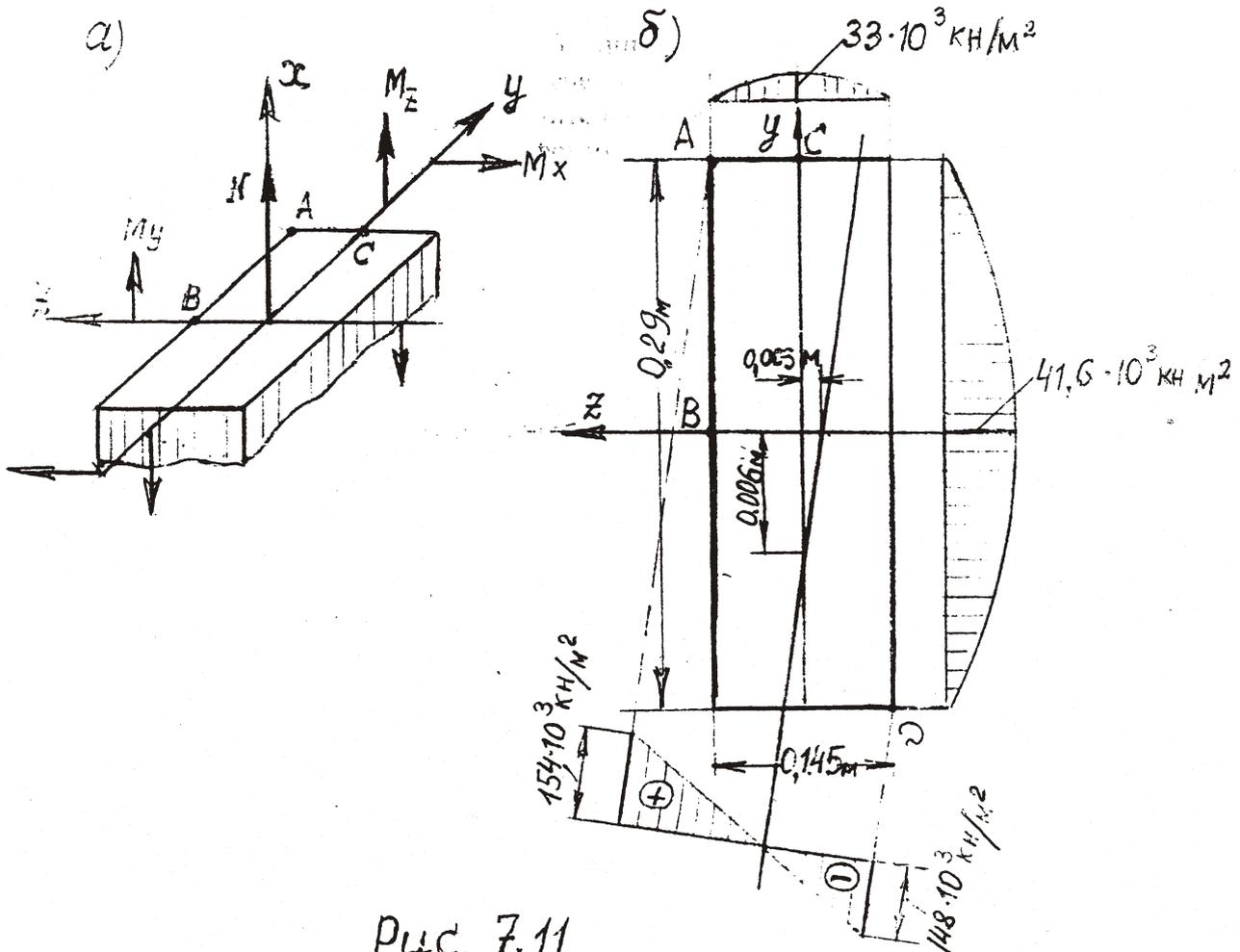


Рис. 7.11

8. Перемещения при изгибе. Аналитический метод.

8.1. Основные понятия.

Продольную ось балки при деформации изгиба, называют *упругой линией*. Основные свойства упругой линии – *плавность* и *неразрывность*. Интенсивность деформации изгиба элементу балки длиной dx (рис. 8.1) определяется степенью искривления его продольной оси, т.е. значением кривизны $\frac{1}{\rho(x)}$, которая связана с изгибающим моментом в сечении и жесткостью балки следующей зависимостью

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M_z(x)}{EI_z}. \quad (8.1)$$

Деформация балки характеризуется двумя величинами, называемыми перемещениями: 1) прогибом, т.е. вертикальным смещением центра тяжести данного сечения (y); 2) углом поворота, т.е. углом, на который поворачивается данное сечение по отношению к своему первоначальному положению $\theta = y'$. Перемещением центра тяжести поперечного сечения вдоль оси балки пренебрегают как величиной высшего порядка малости по сравнению с прогибом. Перемещения в данном сечении балки связаны зависимостью

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx}.$$

В пределах упругих деформаций углы поворота поперечных сечений $\theta \leq 1^\circ$, поэтому принимают $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$, тогда

$$\theta = \frac{dy}{dx}. \quad (8.2)$$

8.2. Аналитический метод определения перемещений.

Приближенное дифференциальное уравнение упругой линии может быть получено на основании зависимости (8.1) и имеет вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_z}, \quad (8.3)$$

где EI_z – жесткость балки при изгибе;

$M_z(x)$ – изгибающий момент в сечении балки.

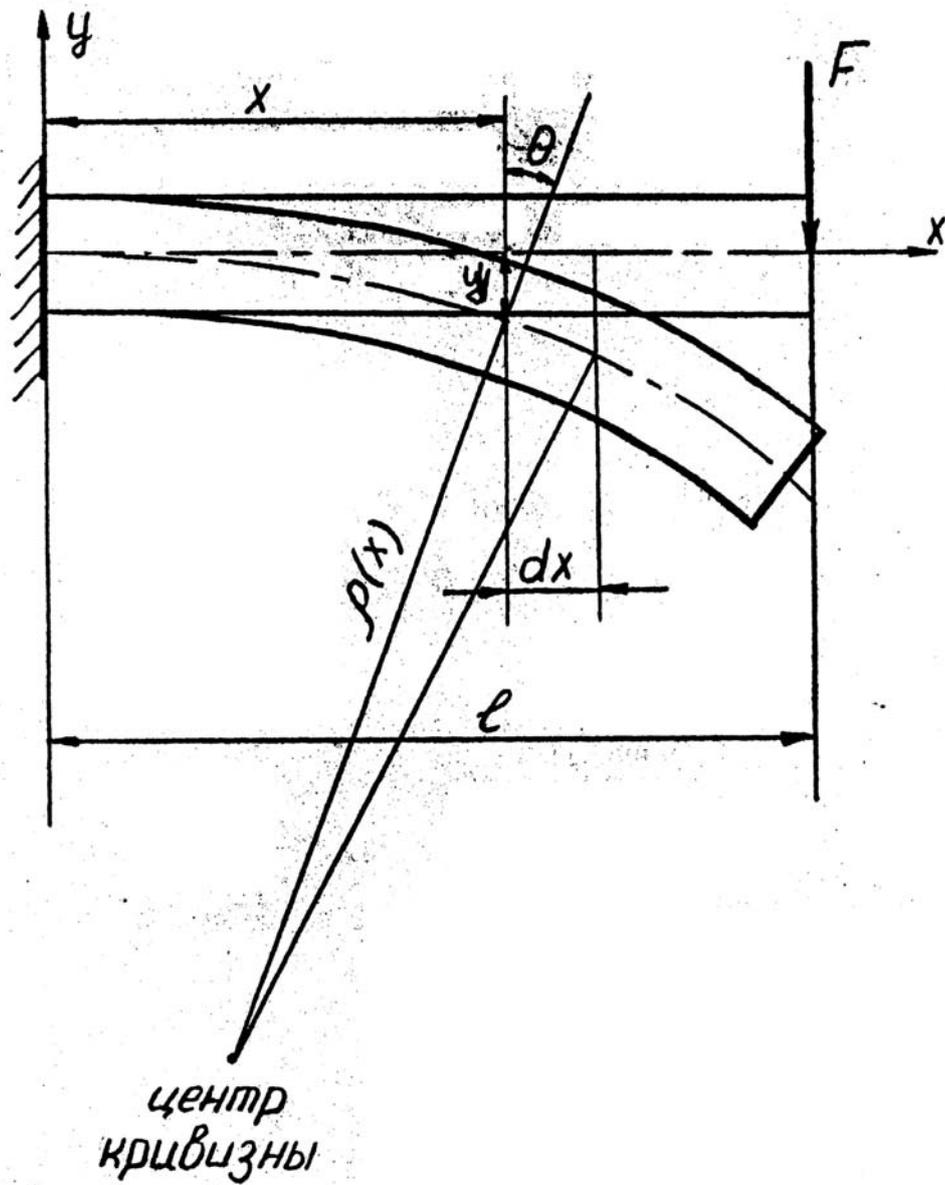


Рис. 8.1

Двухкратным интегрированием этого уравнения получают уравнения искоемых перемещений (угла поворота и прогиба):

$$EI_z \frac{dy}{dx} = \int_l M_z(x) dx + C, \quad (8.4)$$

$$EI_z y = \int_l \left[\int_l M_z(x) dx + C \right] dx + D, \quad (8.5)$$

где (8.4) – уравнение углов поворота; (8.5) – уравнение прогибов. Постоянные интегрирования C и D определяют из граничных условий – условий закрепления балки: в сечении с жесткой заделкой угол поворота и прогиб равны нулю; в сечении с шарнирной опорой прогиб равен нулю. Физический смысл постоянных интегрирования: первая постоянная интегрирования C , деленная на жесткость балки EI_z , равна значению угла поворота в начале координат; вторая постоянная интегрирования D , деленная на жесткость EI_z , равна прогибу балки в начале координат. Если балка имеет несколько расчетных участков, то число постоянных интегрирования будет равно удвоенному значению числа расчетных участков. Для упрощения расчетов применяют **метод уравнивания постоянных интегрирования**. Используя метод уравнивания постоянных интегрирования, добиваются равенства постоянных C и D на всех расчетных участках. При использовании этого метода приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки записывают, соблюдая следующие условия:

- 1). Начало координат выбирают на одном из концов балки и отсчет координаты x для всех расчетных участков ведут от этого начала координат.
- 2). Выражения изгибающего момента, составленные для первого участка сохраняют неизменными для всех последующих расчетных участков балки.
- 3). Вновь вводимые выражения изгибающего момента для последующих участков балки записывают с множителем $(x - a)$, где a – сумма длин предыдущих расчетных участков балки.
- 4). Если на границе участков приложен сосредоточенный момент, то в уравнение изгибающего момента его записывают с множителем $(x - a)^0$.
- 5). Если равномерно распределенная нагрузка на границе некоторого участка заканчивает свое действие, то в выражение изгибающего момента для последующего участка записывают слагаемое, учитывающее ее вычитание.
- 6). Интегрируют уравнения по переменной x на первом участке и $(x - a)$, без раскрытия скобок, на всех последующих расчетных участках балки.

Правило знаков для перемещений: при выборе начала координат на левом конце балки прогиб считают положительным, если он произошел в положительном направлении оси y ; угол поворота, противоположный движению часовой

стрелки, считают положительным. Если начало координат выбрано на правом конце балки, то правило знаков для углов поворота меняется на противоположное, для прогибов – сохраняется.

Определение перемещений в балке проводят с целью проверки ее жесткости.

Условие жесткости имеет вид

$$|y_{max}| \leq [y],$$

где $|y_{max}|$ – максимальный прогиб, $[y]$ – допустимый прогиб,

$$\text{Для пролета } -[y]_{np} = \frac{l}{750} l_{np}, \text{ где } l_{np} \text{ – длина пролета.}$$

$$\text{Для консоли } -[y]_k = \frac{l}{350} l_k, \text{ где } l_k \text{ – длина консоли.}$$

Пример.

Определим аналитическим методом перемещения в балке, показанной на рис. 5.7. (глава 5).

Дифференциальное уравнение упругой линии для балки с выбором начала координат на опоре A имеет вид:

$$EI_z y'' = M_z(x) = R_A x - \frac{qx^2}{2} \Big|_1 + \frac{q(x-2)^2}{2} \Big|_2 + F(x-3) \Big|_3.$$

$$EI_z y' = R_A \frac{x^2}{2} - \frac{qx^3}{6} + C \Big|_1 + \frac{q(x-2)^3}{6} \Big|_2 + F \frac{(x-3)^2}{2} \Big|_3.$$

$$EI_z y = R_A \frac{x^3}{6} - \frac{qx^4}{24} + Cx + D \Big|_1 + \frac{q(x-2)^4}{24} \Big|_2 + F \frac{(x-3)^3}{6} \Big|_3.$$

Граничные условия:

1). $x=0, y_A=0, D=0.$

2). $x=4, y_B=0: 0 = R_A \frac{4^3}{6} - q \frac{4^4}{24} + C \cdot 4 + q \frac{2^4}{24} + F \frac{1}{6};$

$$4C = -50 \cdot \frac{32}{6} + 30 \cdot \frac{32}{3} - 30 \cdot \frac{2}{3} - 20 \cdot \frac{1}{6};$$

$$C = -59,17 \text{ кНм}^2.$$

Угол поворота на опоре A равен:

$$y'_A = C / EI_z;$$

Жесткость балки равна $EI_z = 2 \cdot 10^8 \cdot 2790 \cdot 10^{-8} = 5580 \text{ кНм}^2$.

$$y'_{A(x=0)} = -\frac{59,17}{5580} = -0,011 \text{ рад}.$$

Угол поворота в сечении при $x = 2 \text{ м}$ равен:

$$y'_{(x=2)} = \frac{1}{5580} \left[50 \cdot \frac{2^2}{2} - 30 \cdot \frac{2^3}{6} - 59,17 \right] = 0,00015 \text{ рад}.$$

Угол поворота в сечении при $x = 3 \text{ м}$ равен:

$$y'_{(x=3)} = \frac{1}{5580} \left[50 \frac{3^2}{2} - 30 \frac{3^3}{6} - 59,17 + 30 \frac{1}{6} \right] = 0,006 \text{ рад}.$$

Угол поворота на опоре B равен:

$$y'_{B(x=5)} = \frac{1}{5580} \left[50 \frac{5^2}{2} - 30 \frac{5^3}{6} - 59,17 + 30 \frac{3^3}{6} + 20 \frac{2^2}{2} \right] = 0,021 \text{ рад}.$$

R_A

Определим прогибы в сечениях балки:

а) $x = 2 \text{ м}$.

$$y = \frac{1}{5580} \left[50 \frac{2^3}{6} - 30 \frac{2^4}{24} - 59,17 \cdot 2 \right] = -0,013 \text{ м}.$$

б) $x = 3 \text{ м}$.

$$y = \frac{1}{5580} \left[50 \frac{3^3}{6} - 30 \frac{3^4}{24} - 59,17 \cdot 3 + 30 \frac{1}{24} \right] = -0,0094 \text{ м}$$

Для определения сечения с максимальным прогибом построим график зависимости угла поворота y' от координаты x (рис. 8.2), на основании которого определяется положение сечения с максимальным прогибом ($x = 1,9 \text{ м}$).

$$y_{\max(x=1,9)} = \frac{1}{5580} \left[50 \frac{1,99^3}{6} - 30 \frac{1,99^4}{24} - 59,17 \cdot 1,99 \right] = -0,013 \text{ м}.$$

Допускаемое значение прогиба для пролета балки равно

$$[y] = \frac{4}{750} = 0,0053 \text{ м}.$$

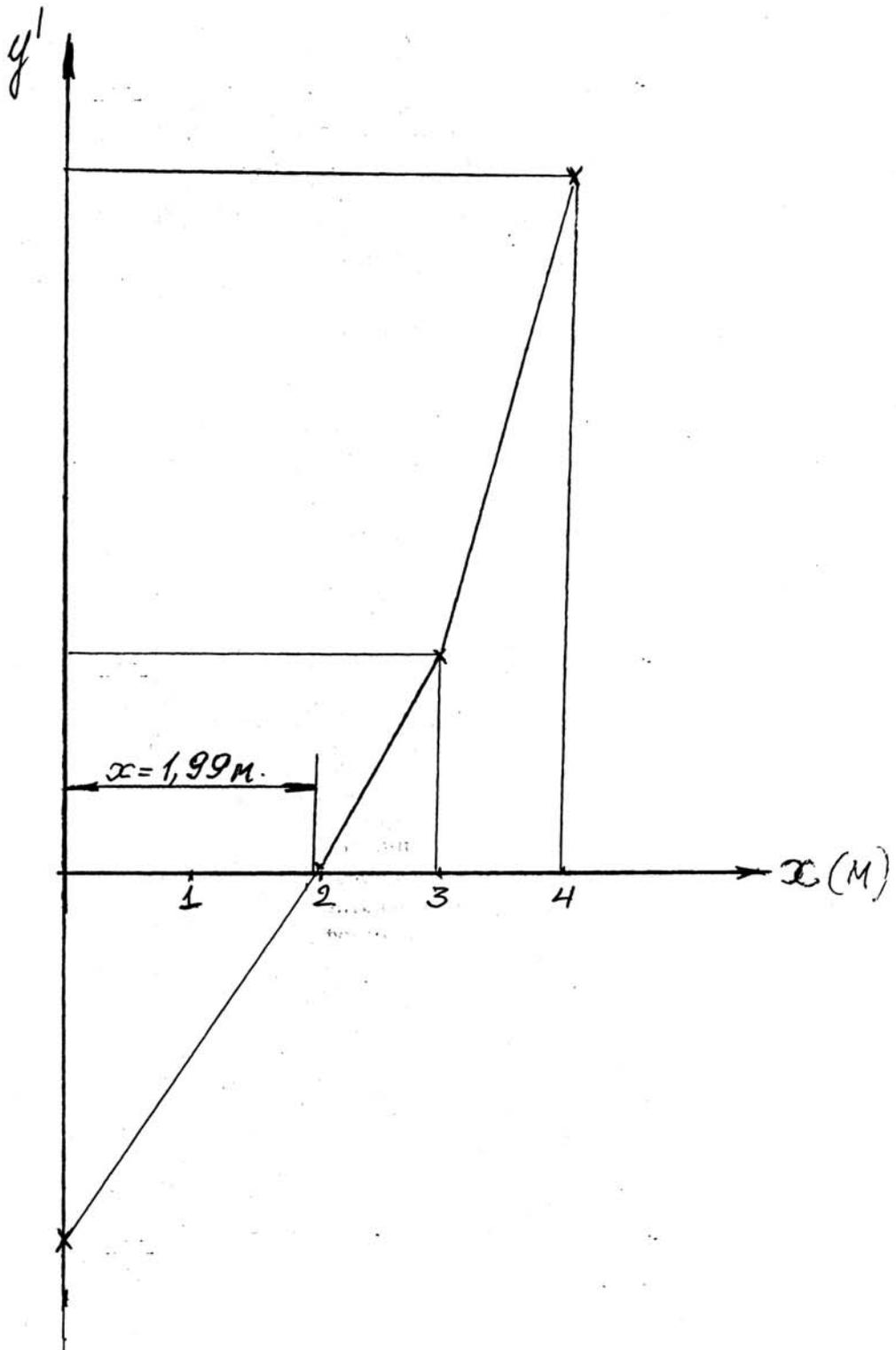


Рис. 8.2

Условие жесткости не выполняется: $|y_{max}| > [y]$.

Подберем новое сечение балки:

$$\frac{|y_{max}|}{[y]} = \frac{0,013}{0,0053} = 2,45 .$$

Следовательно, момент инерции I_z надо увеличить в это число раз.

$$I_{z(нов.)} = I_z \cdot 2,45 = 2790 \cdot 2,45 = 6836 \text{ см}^4 .$$

По сортаменту определяем номер двутавра. Двутавр № 30 (табл. 6.2).

8.3. Статически неопределимые балки.

Балка называется статически неопределимой, если все возникающие в опорах реакции не могут быть определены с помощью только лишь уравнений статики.

Степень статической неопределимости равна разности между числом неизвестных реакций и числом возможных для данной задачи уравнений статики.

Одним из методов раскрытия статической неопределимости балок является аналитический метод.

Последовательность расчета.

1. Составить уравнения равновесия.
2. Используя метод уравнивания постоянных интегрирования, составить дифференциальное уравнение упругой линии и проинтегрировать его.
3. Составить условия закрепления.
4. Вычислить опорные реакции и постоянные интегрирования из совместного решения уравнений равновесия и уравнений, полученных из условий закрепления.

Пример расчета.

В качестве примера рассмотрим расчет балки, изображенной на рис. 8.3. Нагрузка задана: $M = 30 \text{ кНм}$; $F = 20 \text{ кН}$; $q = 12 \text{ кН/м}$.

На опорах балки в общем случае возникают четыре реакции R_A , H_A , R_B и R_K и, т.к. для плоской системы можно составить три уравнения равновесия, заданная балка будет статически неопределимой один раз. Уравнения равновесия:

$$\sum x = 0; H_A = 0 .$$

$$\sum y = 0; R_A + R_B + R_K - q \cdot 2 - F = 0 .$$

$$\sum m_K = 0; -R_A \cdot 5 - R_B \cdot 3 + M + q \cdot 2 \cdot 2 + F \cdot 1 = 0 .$$

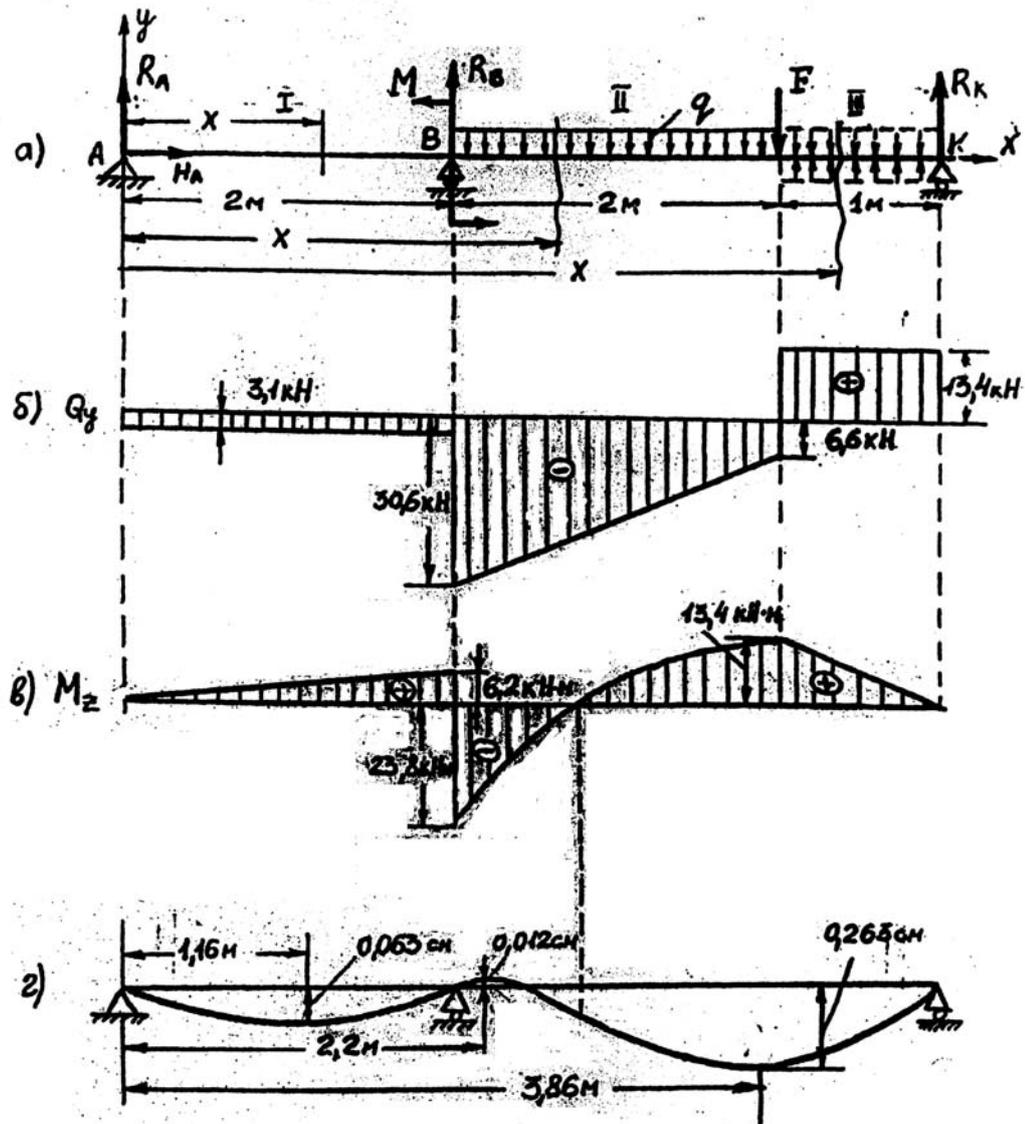


Рис. 8.3

Подставив значения заданных нагрузок, получим

$$\left. \begin{aligned} R_A + R_B + R_K &= 44 \\ 5R_A + 3R_B &= 98 \end{aligned} \right\} *).$$

Выполняя с целью уравнивания постоянных интегрирования указанные выше условия, выберем для всех трех участков балки общее начало координат (опора А). Далее продолжим распределенную нагрузку до конца балки, уравновешивая ее такой же нагрузкой обратного направления, а член, содержащий сосредоточенный момент, умножим на $(x - a)^0$. Дифференциальное уравнение будет иметь вид

$$EI_z y'' = R_A x \Big|_I - M(x-2)^0 + R_B(x-2) - q \frac{(x-2)^2}{2} \Big|_{II} - F(x-4) + q \frac{(x-4)^2}{2} \Big|_{III}.$$

При этом значения координаты "x" для различных участков интегрирования лежат в следующих пределах: для 1-го участка $0 \leq x \leq 2$ м, для 2-го участка $2 \text{ м} \leq x \leq 4$ м и для 3-го $4 \text{ м} \leq x \leq 5$ м. Интегрируя это уравнение дважды, получим:

$$EI_z \cdot y' = C + R_A \frac{x^2}{2} \Big|_I - M(x-2) + R_B \frac{(x-2)^2}{2} - q \frac{(x-2)^3}{6} \Big|_{II} - F \frac{(x-4)^2}{2} + q \frac{(x-4)^3}{6} \Big|_{III}.$$

$$EI_z \cdot y = D + Cx + R_A \frac{x^3}{6} \Big|_I - M \frac{(x-2)^2}{2} + R_B \frac{(x-2)^3}{6} - q \frac{(x-2)^4}{24} \Big|_{II} - F \frac{(x-4)^3}{6} + q \frac{(x-4)^4}{24} \Big|_{III}.$$

Запишем условия, вытекающие из схемы закрепления балки:

1) $x = 0, y_A = 0$; 2) $x = 2 \text{ м}, y_B = 0$; 3) $x = 5 \text{ м}, y_K = 0$. Подставляя в уравнение прогибов перечисленные выше условия для соответствующих участков, получим

$$0 = D + C \cdot 0 + R_A \cdot 0.$$

$$0 = D + C \cdot 2 + R_A \cdot \frac{2^3}{6};$$

$$0 = D + C \cdot 5 + R_A \cdot \frac{5^3}{6} - M \frac{3^2}{2} + R_B \cdot \frac{3^3}{6} - q \frac{3^4}{24} - F \frac{1}{6} + \frac{3^4}{24},$$

откуда, подставляя значения нагрузок, получим соответственно

$$\left. \begin{aligned} D &= 0 \\ 3C + 2R_A &= 0 \\ C + 4,17R_A + 0,9R_B &= 35,7 \end{aligned} \right\} 0,3 \quad **).$$

Решая совместно уравнения *) и **), найдем

$$R_A = 3,1 \text{ кН},$$

$$\begin{aligned}
 R_B &= 27,5 \text{ кН} , \\
 R_K &= 13,4 \text{ кН} , \\
 C &= -2,1 \text{ кНм}^2 .
 \end{aligned}$$

Знак плюс в ответах для реакций показывает, что их направление было выбрано верно. Таким образом, статическая неопределимость балки раскрыта. Эпюры для поперечной силы и изгибающего момента приведены на том же рисунке.

Подберем двутавровый профиль балки. На основании условия прочности (6.15)

$$W_z = \frac{|M_{z \max}|}{[\sigma]} = \frac{23,8}{16 \cdot 10^4} = 0,000149 \text{ м}^3 = 149 \text{ см}^3$$

и по сортаменту подбираем двутавр № 18, для которого $W_z = 143 \text{ см}^3$ $I_z = 1290 \text{ см}^4$.

Для вычисления экстремальных прогибов на участках балки приравняем нулю первую производную от прогиба, т.е. выражение угла поворота. На 1-м участке будем иметь

$$-2,1 + 3,1 \cdot \frac{x_0^2}{2} = 0, \text{ откуда } x_0 = \pm 1,16 \text{ м} .$$

Так как для 1-го участка $0 \leq x \leq 2 \text{ м}$, то данному участку отвечает решение $x_0 = 1,16 \text{ м}$. Подставляя в уравнение для прогибов на этом участке значения $x_0 = 1,16 \text{ м}$; $E = 2 \cdot 10^8 \text{ кН} / \text{м}^2$, $I_z = 1290 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$, получим наибольшее значение прогиба

$$y_{\max I} = \frac{1}{2 \cdot 10^8 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} \left(-2,1 \cdot 1,16 + 3,1 \frac{1,16^3}{6} \right) = -6,3 \cdot 10^{-4} \text{ м} .$$

Приравнивая нулю выражения углов поворота на 2-ом и 3-ем участках получаем кубические уравнения. Отыскание корней таких уравнений в пределах данного участка может быть выполнено, например, графически. Для 2-го участка уравнение углов поворота имеет вид

$$EI_z \cdot y' = -2,1 + 3,1 \frac{x^2}{2} - 3(x-2) + 27,5 \left(\frac{x-2}{2} \right)^2 - 12 \frac{(x-2)^3}{6} .$$

На рис. 8.4 построена кривая, отвечающая этому уравнению (найлены значения $EI_z \cdot y'$ через каждые 0,4 м). Из рисунка видно, что первая производная от прогиба в пределах $2 \text{ м} \leq x \leq 4 \text{ м}$ дважды обращается в ноль, т.е. на 2-ом участке имеется два экстремальных прогиба. Подставляя найденные значения $x_1 = 2,2 \text{ м}$ и $x_2 = 3,86 \text{ м}$ в уравнение для прогибов, находим

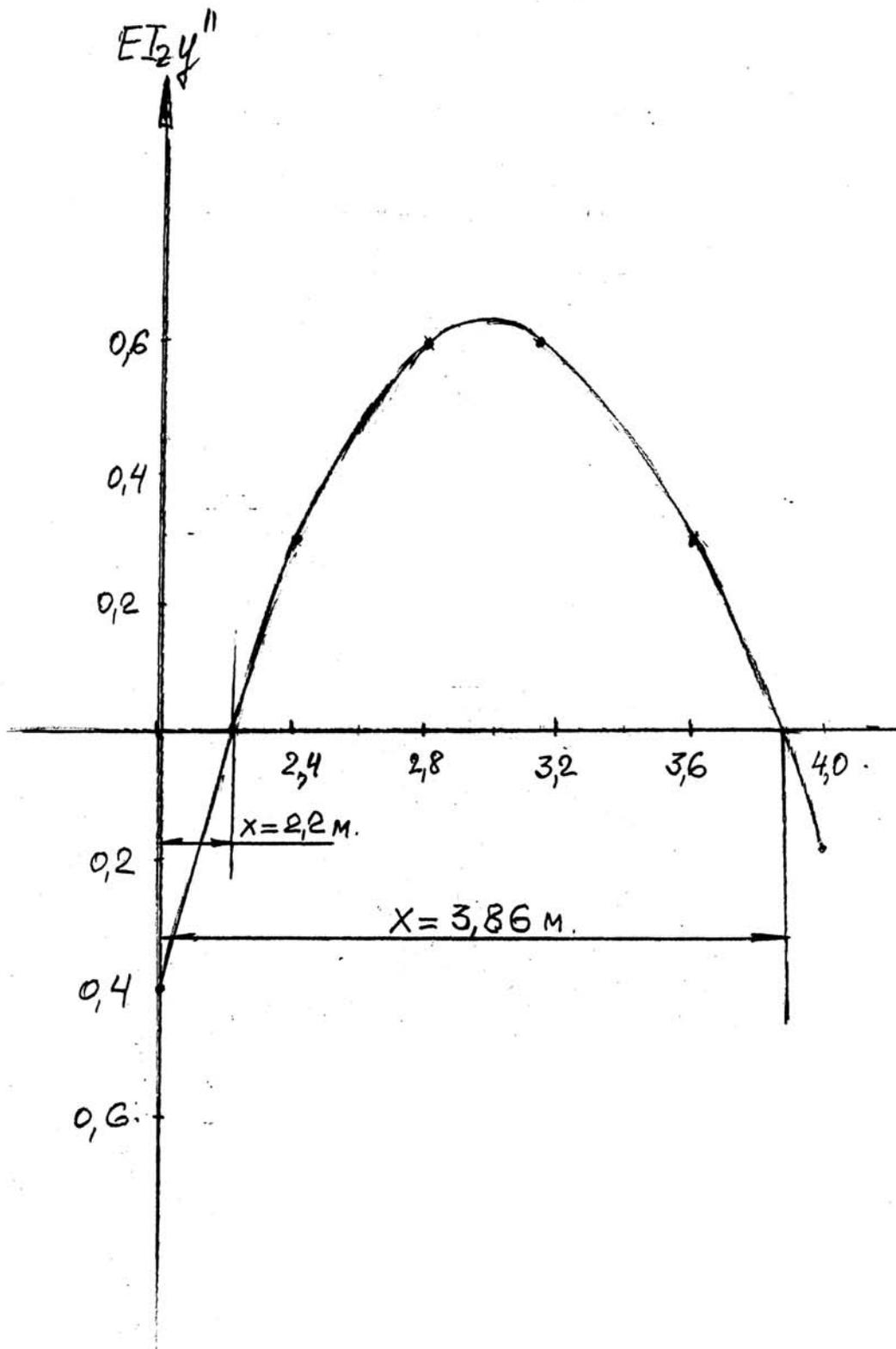


Рис. 8.4

$$y_{\max II} = \frac{1}{2 \cdot 10^8 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} \left(-2,1 \cdot 2,2 + 3,1 \cdot \frac{2,2^3}{6} - 30 \cdot \frac{0,2^2}{2} + 27,5 \cdot \frac{0,2^3}{6} - 12 \cdot \frac{0,2^4}{24} \right) = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,012 \text{ см}.$$

$$y_{\max II} = \frac{1}{2 \cdot 10^8 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} \left(-2,1 \cdot 3,86 + 3,1 \cdot \frac{3,86^3}{6} - 30 \cdot \frac{1,86^2}{2} + 27,5 \cdot \frac{1,86^3}{6} - 12 \cdot \frac{1,86^4}{24} \right) = -26,3 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,263 \text{ см}.$$

Для 3-го участка уравнение углов поворота имеет вид

$$EI_z y' = -2,1 + 3,1 \frac{x^2}{2} - 30(x-2) + 27,5 \frac{(x-2)^2}{2} - 12 \frac{(x-2)^3}{6} - 20 \frac{(x-4)^2}{2} + 12 \frac{(x-4)^3}{6}.$$

Решение уравнения показывает, что на этом участке производная не обращается в ноль и экстремальных прогибов нет.

Допускаемый прогиб в левом пролете балки равен $[y] = \frac{2}{750} = 0,267 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, а в правом $[y] = \frac{3}{750} = 0,4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$. Таким образом, на всех участках балки наибольшие прогибы не превышают допускаемых величин и сечение балки, найденное по условию прочности, отвечает и условию жесткости.

В тех случаях, когда прогиб на каком-либо участке балки превышает допускаемое значение, необходим подбор нового сечения. В этом случае момент инерции сечения, найденного по условию прочности, увеличивают во столько раз, во сколько наибольший прогиб на участке превышает допускаемое его значение, и по сортаменту по этой величине подбирают новое значение двутавра. На рис. 8.3(з) показан вид изогнутой оси балки.

9. Устойчивость элементов конструкций.

9.1. Основные понятия.

Для обеспечения надежной работы конструкций, при проектировании, помимо расчетов на прочность и жесткость необходимо выполнять расчет на устойчивость, т.к. потеря устойчивости одного элемента конструкции может привести к разрушению всей конструкции.

Под устойчивостью понимается способность системы сохранять свое начальное состояние равновесия при внешних воздействиях, а это значит, что все элементы конструкции должны деформироваться в таких пределах, чтобы характер их работы оставался неизменным, т.е. не изменялся вид деформации.

Различают три вида состояния равновесия: устойчивое, неустойчивое и безразличное.

Устойчивым называется такое состояние равновесия, при котором при возможных отклонениях системы от начального положения, возникают силы, стремящиеся вернуть ее в начальное состояние. (Этими силами могут быть силы тяжести, силы упругости, силы инерции).

Неустойчивым называется такое состояние равновесия, при котором при возможных отклонениях системы от начального положения возникают силы, стремящиеся удалить систему от исходного состояния.

Безразличным называется такое состояние равновесия, когда при возможных отклонениях системы от начального положения не возникают силы, стремящиеся вернуть ее и не возникают силы, стремящиеся удалить ее от исходного положения.

Состояние безразличного равновесия является граничным между устойчивым и неустойчивым и является опасным в силу неопределенности. Поэтому это состояние равновесия называется критическим, а нагрузка, при которой система сохраняет безразличное состояние равновесия называется **критической нагрузкой**. Очень существенно, что потеря устойчивости сопровождается нарастанием больших деформаций при малом увеличении нагрузки, поэтому явление носит характер внезапности, катастрофичности, что и делает его опасным. Поэтому критическая нагрузка считается столь же опасной для конструкции, как и нагрузка, при которой происходит разрушение конструкции (как предел прочности).

Потеря устойчивости сжатого стержня сопровождается изгибом его оси, поэтому такой случай деформации называют продольным изгибом.

9.2. Формула Эйлера для критической силы.

Вопрос об устойчивости сжатых стержней впервые был поставлен и решен Леонардом Эйлером в 1759 г. Эйлером выполнен вывод формулы для вычисления величины критической силы для стержня шарнирно–закрепленного по обоим концам. Формула имеет вид:

$$F_k = \frac{EI_{min}\pi^2}{(\mu l)^2}, \quad (9.1)$$

где E – модуль нормальной упругости материала стержня.

I_{min} – минимальный момент инерции поперечного сечения стержня. (Из двух осевых моментов инерции относительно главных центральных осей выбирается наименьший, потому что потеря устойчивости происходит в плоскости наименьшей жесткости.).

l – длина стержня.

μ – коэффициент приведения длины стержня, который зависит от условий закрепления концов стержня.

Эйлером было доказано, что при потере устойчивости изогнутая ось стержня является синусоидальной кривой. Коэффициент μ показывает на какой части длины стержня укладывается полуволна синусоиды (рис. 9.1).

Формула Эйлера получена на основании приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси, которое справедливо в пределах действия закона Гука. Следовательно, критическое напряжение (σ_k) не должно превышать предела пропорциональности материала стержня ($\sigma_{пц}$), т.е.

$$\sigma_x \leq \sigma_{пц}.$$

№ п/п	Схема закрепления стержня и вид изогнутой оси	Коэффициент приведения	Примечание
		μ	
1		0,5	Жесткое закрепление обоих концов стержня.
2		1	Шарнирное закрепление обоих концов стержня
3		0,7	Жесткое закрепление верхнего конца и шарнирное-нижнего.
4		2	Жесткое закрепление нижнего конца стержня

Рис. 9.1

9.3. Расчет на устойчивость сжатых стержней.

F_{κ} – опасная нагрузка. Безопасная нагрузка по условию устойчивости сжатого стержня:

$$F \leq \frac{F_{\kappa}}{\kappa_y}; \quad F = \frac{EI_{\min} \pi^2}{\kappa_y (\mu l)^2}. \quad (9.2)$$

F – безопасная нагрузка;

κ_y – коэффициент запаса устойчивости, назначается по нормам для данного материала.

$$\kappa_y = 5 \div 5,5 \quad - \text{чугун.}$$

$$\kappa_y = 2 \div 3 \quad - \text{сталь.}$$

$$\kappa_y = 2,3 \div 3,2 \quad - \text{дерево.}$$

Последовательность расчета.

1. По формуле Эйлера проводят предварительный подбор размеров сечения стержня, для чего на основании (9.2) определяют

$$I_{\min} \geq \frac{F \kappa_y (\mu l)^2}{E \cdot \pi^2}.$$

По полученному значению I_{\min} для:

– прокатного профиля по сортаменту определяют № профиля, площадь сечения A .

– прямоугольного или круглого поперечных сечений по соответствующим формулам определяют размер сечения (b , или r).

а) Прямоугольное сечение.

При заданном отношении сторон прямоугольника $n = h/b$, минимальный момент инерции

$$I_{\min} \geq \frac{F \kappa_y (\mu l)^2}{E \cdot \pi^2} = \frac{b^3 h}{12} = \frac{nb^4}{12};$$

площадь сечения

$$A = bh = nb^2.$$

б) Круглое сечение.

$$I_{\min} = \frac{\pi r^4}{4}, \quad A = \pi r^2.$$

2. Вычисляют радиус инерции i_{min} сечения. Радиус инерции является геометрической характеристикой сечения и вычисляется по формуле

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}.$$

3. Вычисляют приведенную гибкость стержня λ :

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}}.$$

4. По таблицам коэффициента снижения допускаемого напряжения (φ), по полученному значению λ для данного материала стержня определяют значение коэффициента φ . (табл. 9.1.).

5. Проверка подобранного сечения по условию устойчивости: $\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma]$. В том случае, если условие устойчивости не выполняется, то следует увеличить размер сечения при $\sigma > \varphi[\sigma]$ или уменьшить размер сечения при $\sigma < \varphi[\sigma]$, так чтобы выполнялось условие перенапряжения или недонапряжения стержня:

$$\frac{|\sigma - \varphi[\sigma]|}{\varphi[\sigma]} \cdot 100\% \leq 5\%.$$

Таблица 9.1

ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА φ

Гибкость λ	ЗНАЧЕНИЯ φ ДЛЯ			
	СТАЛИ	ЧУГУНА	ДЕРЕВА	БЕТОНА
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,97	0,99	1,00
20	0,96	0,91	0,97	0,96
30	0,94	0,81	0,93	0,90
40	0,92	0,69	0,87	0,84
50	0,89	0,57	0,80	0,76
60	0,86	0,44	0,71	0,70
70	0,81	0,34	0,60	0,63
80	0,75	0,26	0,48	0,57
90	0,69	0,20	0,38	0,51
100	0,60	0,16	0,31	0,45
110	0,52	—	0,25	—
120	0,45	—	0,22	—
130	0,40	—	0,18	—
140	0,36	—	0,16	—
150	0,32	—	0,14	—
160	0,29	—	0,12	—
170	0,26	—	0,11	—
180	0,23	—	0,10	—
190	0,21	—	0,09	—
200	0,19	—	0,08	—

Пример.

Проведем расчет на устойчивость сжатого стержня двутаврового профиля, жестко закрепленного обоими концами (рис. 9.2). Материал стержня сталь, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $\kappa_y = 2,5$.

$$1). I_{min} \geq \frac{F \cdot \kappa_y \cdot (\mu l)^2}{E \pi^2} = \frac{800 \cdot 2,5 \cdot (0,5 \cdot 4)^2}{2 \cdot 10^8 \cdot 3,14^2} = 406 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 406 \text{ см}^4 .$$

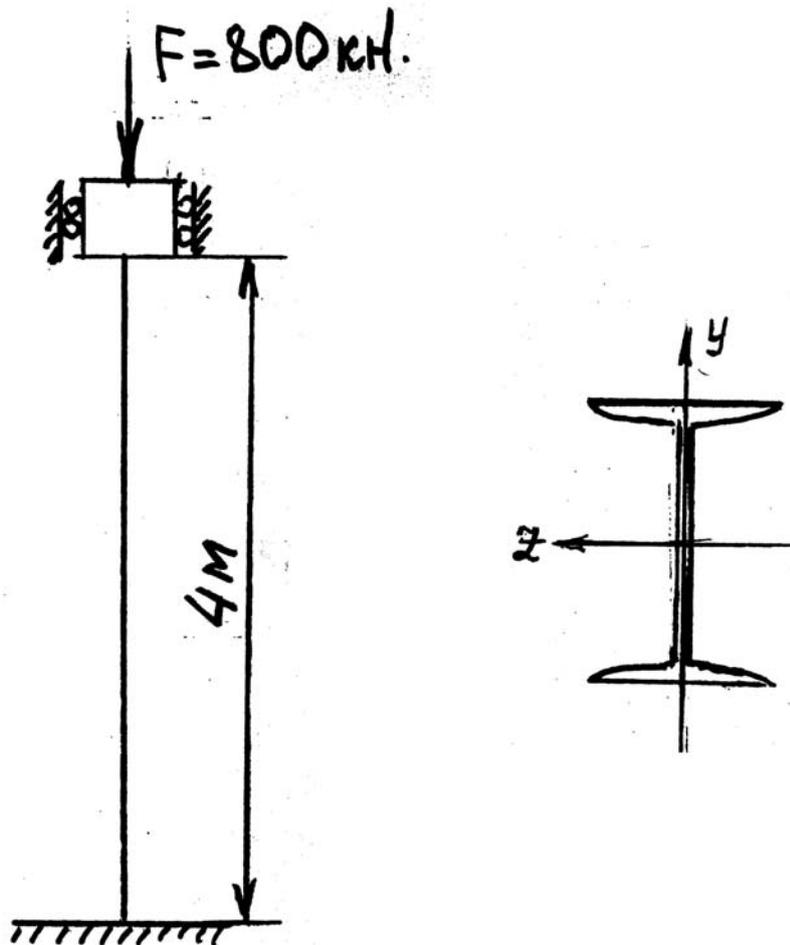


Рис. 9.2

По сортаменту (табл. № 6.2) принимаем двутавр № 33. Момент инерции $I_{min} = I_y = 419 \text{ см}^4$, площадь сечения $A = 53,8 \text{ см}^2$.

$$2). i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{419}{53,8}} = 2,79 \text{ см} .$$

$$3). \lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{0,5 \cdot 400}{2,79} = 72 .$$

4). По таблице 9.1

$\left. \begin{array}{l} \lambda = 70, \quad \varphi = 0,81 \\ \lambda = 80, \quad \varphi = 0,75 \end{array} \right\}$ интерполируя, получаем $\varphi = 0,798$.

$$5). \sigma = \frac{F}{A} = \frac{800}{53,8 \cdot 10^{-4}} = 14,9 \cdot 10^4 \text{ кН / м}^2 .$$

$$\varphi[\sigma] = 0,798 \cdot 16 \cdot 10^4 = 12,8 \cdot 10^4 \text{ кН / м}^2 .$$

Отсюда видно, что условие устойчивости не выполняется, следовательно надо увеличить значение момента инерции I_{min} . Принимаем двутавр № 36.

$$I_{min} = 516 \text{ см}^4 ,$$

$$A = 61,9 \text{ см}^2 , \text{ тогда}$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{516}{61,9}} = 2,89 \text{ см} .$$

$$\lambda = \frac{0,5 \cdot 400}{2,89} = 69 .$$

$$\varphi = 0,815 .$$

$$\sigma = \frac{800}{61,9 \cdot 10^{-4}} = 12,9 \cdot 10^4 \text{ кН / м}^2 .$$

$$\varphi[\sigma] = 0,815 \cdot 16 \cdot 10^4 = 13 \cdot 10^4 \text{ кН / м}^2 .$$

Условие устойчивости выполняется.